Exercice n°86 p.130

Partie A.

1. (a) f est une différence, et le second terme est un produit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \frac{1}{4}(x+1) \\ v(x) & = & e^{-x} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & \frac{1}{4} \\ v'(x) & = & -e^{-x} \end{array}\right.$$

Ainsi $f'(x) = 1 - \left(\frac{1}{4} \times e^{-x} + \frac{1}{4}(x+1) \times (-e^{-x})\right) = 1 - \left(\frac{1}{4} \times e^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-x} - \frac{1}{4}e^{-x}\right) = \boxed{1 + \frac{1}{4}xe^{-x}}$

f' est également une somme et le second terme un produit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \frac{1}{4}x \\ v(x) & = & e^{-x} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & \frac{1}{4} \\ v'(x) & = & -e^{-x} \end{array}\right.$$

Ainsi $f''(x) = 0 + \left(\frac{1}{4} \times e^{-x} + \frac{1}{4}x \times (-e^{-x})\right) = \boxed{\frac{1}{4}e^{-x}(1-x)}$

(b) On peut alors construire le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Sgn. $f''(x)$		$+$	0	$-$	
Var. f'	$-\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{4}e^{-1}$	$\searrow$	0

Pour l'étude des limites : en $-\infty$ les règles de produit et d'addition permettent de répondre directement. En $+\infty$ il faut utiliser le fait que l'exponentielle l'emporte sur les puissances.

(c) $\left.\begin{array}{l} f' \text{ est strictement croissante sur }]-1,21;-1,20[\\ f' \text{ est continue sur }]-1,21;-1,20[\\ f'(-1,21) \approx -0,01 < 0 \\ f'(-1,20) \approx 0,004 > 0 \end{array}\right\}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas strictement monotone :
$\exists! x \in]-1,21;-1,20[$ tel que $f'(x) = 0$. Dans la suite, cet unique antécédent de 0 est noté α, comme dans l'énoncé.

2. (a) Puisque f' est croissante sur $]-\infty;1]$, on en déduit que f' est strictement négative sur $]-\infty;\alpha[$, s'annule en α, et est strictement positive sur $]\alpha;1]$. Ensuite f' est strictement décroissante et tend vers 0 en $+\infty$, ainsi elle reste strictement croissante jusqu'en $+\infty$.

On déduit le tableau suivant :

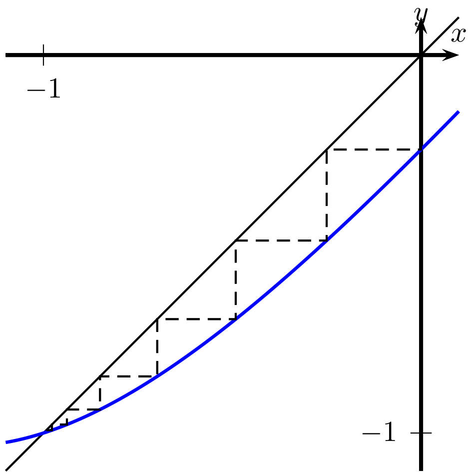
x	$-\infty$		α		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var. f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) $-1 > \alpha$ donc f est strictement croissante sur $[-1;0]$. Or $f(-1) = -1$ et $f(0) = -0,25$ donc $\forall x \in I, f(x) \in [-1;-0;25] \subset I$.

On a bien démontré que $\forall x \in I, f(x) \in I$.

Partie B.

1. En utilisant la représentation graphique, on peut conjecturer que $\boxed{u \text{ est strictement décroissante}}$ et $\boxed{\text{convergente vers } -1}$:



2. (a) Posons P_n : « $-1 < u_n < 0$ ».

   Initialisation : pour $n = 1$, $u_1 = f(u_0) = f(0) = -0,25$ et $-1 < -0,25 < 0$ donc $P(1)$ est vraie.

   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie et démontrons $P(n+1)$.

$$\begin{array}{rcl} -1 < & u_n & < 0 \\ f(-1) < & f(u_n) & < f(0) \\ -1 < & u_{n+1} & < -0,25 \\ -1 < & u_{n+1} & < 0 \end{array}$$

   On compose par f qui est strictement croissante sur $[-1;0]$

   On remplace par les valeurs

   $-0,25 < 0$

   Conclusion : On vient de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < u_n < 0$.

   (b) En regardant l'expression de $f(x)$, on voit que $u_{n+1} - u_n$ va se simplifier et qu'on pourra étudier facilement son signe :

   $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \dfrac{1}{4}(u_n + 1)e^{-u_n} - u_n = -\dfrac{1}{4}(u_n + 1)e^{-u_n}$

   On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < u_n < 0$ ainsi $0 < u_n + 1 < 1$. L'exponentielle est toujours strictement positive également, ainsi par règle des signes $u_{n+1} - u_n$ est toujours strictement négatif donc $\boxed{u \text{ est strictement décroissante}}$.

   (c) u est strictement décroissante et minorée (par -1) donc $\boxed{\text{elle est convergente}}$. Sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, il nous faut résoudre cette équation :

$$\begin{array}{r} \ell - \dfrac{1}{4}(\ell + 1)e^{-\ell} = \ell \\ -\dfrac{1}{4}(\ell + 1)e^{-\ell} = 0 \end{array}$$

   $-\ell$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul. Or l'exponentielle ne s'annule jamais, ainsi c'est donc $\ell + 1$ qui doit être nul, donc $\boxed{\ell = -1}$.