Exercice 1 - Tirage dans une urne

1. La variable k représente le nombre de tirages que l'on souhaite faire. Une fois que l'utilisateur a rentré une valeur correcte (inférieure ou égale à la valeur initiale de n), elle ne change plus.

   Les variables n, $rouges$ et $noires$ stockent le nombres de boules qu'il reste dans l'urne à tout moment : n le total, $rouges$ les rouges et $noires$ les noires. Elles sont donc mises à jour à chaque tirage puisqu'il s'agit d'un tirage sans remise.

   La variable i ne sert que comme variable de boucle, pour compter de 1 à k.

   Enfin les variables nbr, nbn et nbv servent à compter le nombre de boules respectivement rouges, noires et vertes que l'on a tirées dans l'expérience aléatoire.

   La variable $tirage$ stocke le résultat obtenu de manière pseudo-aléatoire dans $[0;1[$ par Algobox. On se sert ensuite de cette variable pour déterminer la couleur d'une boule tirée « au hasard ». Effectivement il y a $rouges$ boules rouges et n boules au total, donc la probabilité de tirer une rouge est de $\dfrac{rouges}{n}$ (ce qui correspond bien à la longueur de l'intervalle $\left[0;\dfrac{rouges}{n}\right[$). De même il y a $noires$ boules noires et n boules au total, donc la probabilité de tirer une noire est de $\dfrac{noires}{n}$ (ce qui correspond à la longueur de l'intervalle $\left[\dfrac{rouges}{n};\dfrac{rouges+noires}{n}\right[$), et du coup il reste $n-rouges-noires$ boules vertes, donc la probabilité de tirer une verte est de $\dfrac{n-rouges-noires}{n}$ (ce qui correspond à la longueur de l'intervalle $\left[\dfrac{rouges+noires}{n};1\right[$).

2. On peut faire autant de tirages que voulu si l'on tire avec remise, ainsi k peut prendre toute valeur entière : il n'y a plus besoin de vérifier que k est inférieur ou égal à n (et pour la question 3, il est important de s'affranchir de cette contrainte).

   Ensuite il ne faut plus mettre à jour les variables n, $rouges$ et $noires$. Finalement, l'algorithme modifié est le suivant :

Algorithme de tirage avec remise.

```
Variables :
tirage est un nombre réel.
i, k, n, rouges, noires, nbr, nbn et nbv sont huit nombres entiers naturels.

Corps de l'algorithme :
n prend la valeur 20, rouges prend la valeur 7 et noires prend la valeur 11
nbr, nbn et nbv prennent chacun la valeur 0
Lire la valeur de k
Pour i variant de 1 jusqu'à k
    tirage prend la valeur random()
    Si tirage < rouges ÷ n, Alors
        nbr prend la valeur nbr + 1
    Sinon
        Si tirage < (noires + rouges) ÷ n, Alors
            nbn prend la valeur nbn + 1
        Sinon
            nbv prend la valeur nbv + 1
        Fin_Bloc_Si
    Fin_Bloc_Si
Fin_Bloc_Pour
Afficher le message "Dans le tirage il y a eu "
Afficher la variable nbr
Afficher le message " boules rouges, "
Afficher la variable nbn
Afficher le message " boules noires et "
Afficher la variable nbv
Afficher le message " boules vertes."
```

3. Avec remise, on devrait obtenir en moyenne comme affichage : $nbr = \dfrac{k\times rouges}{n}$, $nbn = \dfrac{k\times noires}{n}$ et $nbv = \dfrac{k\times(n-rouges-noires)}{n}$. Effectivement, en a vu en seconde que pour la répétition identique d'une

même expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'un caractère se rapproche de sa probabilité lorsque l'on augmente le nombre de répétitions. Ici la probabilité de tirer une rouge est de $\dfrac{rouges}{n}$ à chaque tirage, donc au bout de k tirages on en aura en moyenne $\dfrac{k \times rouges}{n}$, de même pour les nores et les vertes.
En faisant varier k, on voit que la simulation est proche de ces valeurs théoriques escomptées lorsque k est très grand, comme prévu et comme déjà vu en seconde !

Exercice 2 - Marches aléatoires sur les entiers relatifs

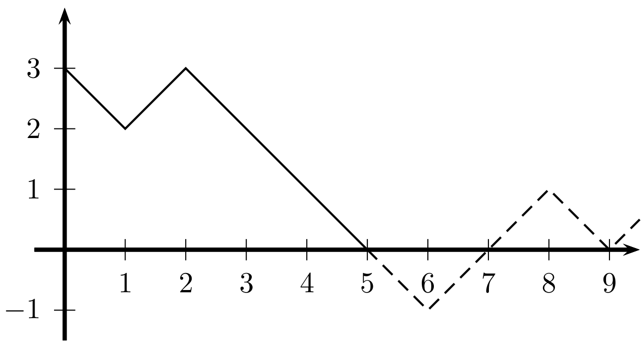
Partie A - Dénombrement

1. A chaque étape il y a 2 possibilités : montée ou descente. Puisqu'il y a n étapes, il est assez clair que cela donne $\boxed{2^n \text{ trajectoires différentes.}}$
2. Dans cette question, dans un chemin de (n, a) à (m, b), on notera *montees* le nombre de montées et *descentes* le nombre de descentes. Dans un tel chemin, puisqu'on va de l'abscisse n à l'abscisse m, cela correspond à $m - n$ étapes.
   (a) A chaque fois qu'on fait une étape (donc qu'on augmente l'abscisse de 1), on augmente l'ordonnée de 1 ou on la baisse de 1.
   - Dans le cas où $b - a > 0$ (donc $|b - a| = b - a$). Pour aller jusqu'à un point d'abscisse m, on a augmenté l'ordonnée d'au plus $m - n$ (cas extrême où il n'y a que des montées). Donc forcément, l'ordonnée d'arrivée est inférieure ou égale à $a + m - n$, donc on ne peut pas avoir $b - a > m - n$.
   - Dans le cas où $b - a < 0$ (donc $|b - a| = a - b$). Pour aller jusqu'à un point d'abscisse m, on a baissé l'ordonnée d'au plus $m - n$ (cas extrême où il n'y a que des descentes). Donc forcément, l'ordonnée d'arrivée est supérieure ou égale à $a - (m - n)$, donc on ne peut pas avoir $a - b > m - n$.

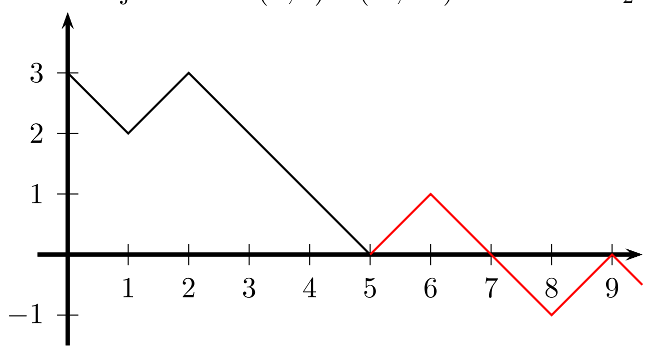
   On a bien démontré que $\boxed{\text{dans un chemin de } (n, a) \text{ à } (m, b) \text{ il y a } |b - a| \leq m - n}$.

   (b) On a fait $m - n$ étapes qui sont chacune soit une montée soit une descente donc $m - n = montees + descentes$.
   Or $b = a + montees - descentes$ donc $b - a = montees - descentes$. Mais $montees + descentes = montees - descentes + 2 \times descentes$ donc ces deux quantités ont la même parité. Ainsi on a bien démontré que $\boxed{\text{dans un chemin de } (n, a) \text{ à } (m, b),\ m - n \text{ et } b - a \text{ ont même parité}}$.

   (c) Soit C_1 l'ensemble des chemins joignant (n, a) à (m, b) et touchant l'axe des abscisses, et C_2 l'ensemble des chemins joignant (n, a) à $(m, -b)$.
   Soit $c \in C_1$. Puisque c touche l'axe des abscisses, il y a un premier point dans c qui est sur l'axe des abscisses ; appelons son abscisse x (c'est donc le point $(x, 0)$). On crée alors le chemin c' de la manière suivante : on va de (n, a) à $(x, 0)$ de la même manière qu'en c, puis on va de $(x, 0)$ à $(m, -b)$ en inversant la suite des montées descentes présentes dans c. Le chemin c' joint donc (n, a) à $(m, -b)$. Donc $c' \in C_2$.



$\Rightarrow$

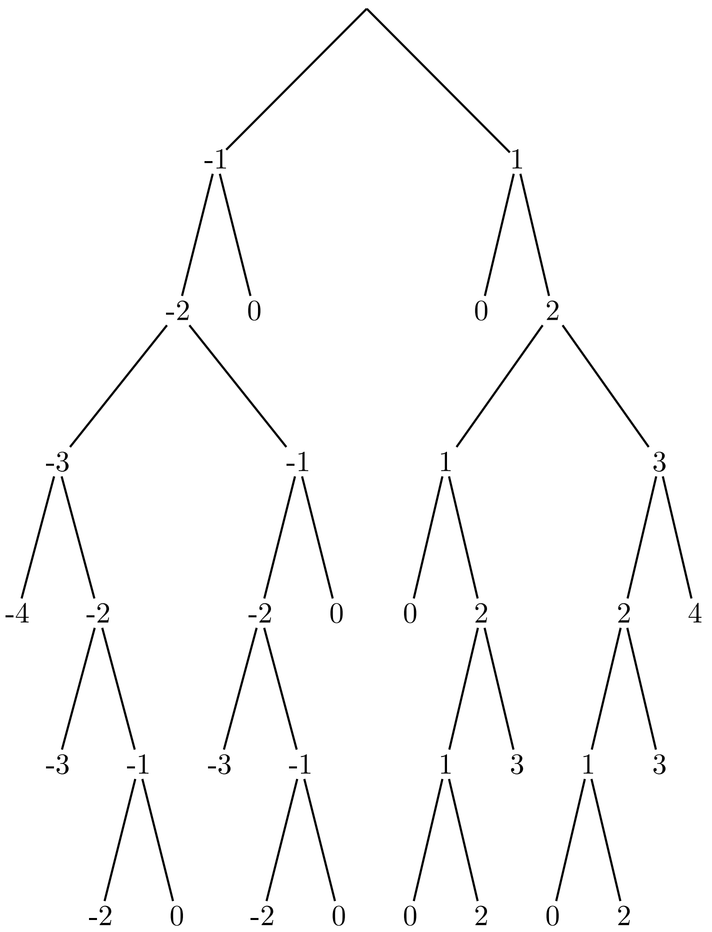


   Il est clair que si c et d sont deux chemins différents dans C_1, les chemins c' et d' seront différents. Ainsi il y a au moins autant de chemins dans C_2 que dans C_1 (puisqu'à l'aide de cette transformation, on crée autant de chemins différents dans C_2 qu'il y a de chemins dans C_1).
   Soit maintenant $c \in C_2$. Puisque c joint (n, a) à $(m, -b)$ et que $a > 0$ et $-b < 0$, alors c coupe forcément l'axe des abscisses ; donc il le coupe une première fois en une abscisse qu'on note de même x. On crée alors le chemin c'' de la manière suivante : on va de (n, a) à $(x, 0)$ de la même manière qu'en c, puis on va de $(x, 0)$ à (m, b) en inversant la suite des montées descentes présentes dans c (c'est en fait la même opération que précédemment) Le chemin c'' joint donc (n, a) à (m, b) et coupe l'axe des abscisses. Donc $c'' \in C_1$.

Il est clair que si c et d sont deux chemins différents dans C_2, les chemins c'' et d'' seront différents. Ainsi il y a au moins autant de chemins dans C_1 que dans C_2.
Finalement, $\boxed{\text{il y a autant de chemins dans } C_1 \text{ que dans } C_2}$.

Partie B - Retour en 0

1. Si T est fini, cela veut dire en particulier que le chemin $(0,0)$ vers $(n,0)$ existe. La question 1.2.b) nous dit que pour que cela soit possible, il faut que $0-0$ et $n-0$ aient la même parité. $\boxed{\text{Il faut donc que } n \text{ soit pair}}$. Ainsi il est impossible qu'en choisissant un chemin au hasard, son premier retour soit un entier impair donc si $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\mathrm{P}(T = 2n+1) = 0}$.
2. $(T = 2) \Leftrightarrow (S_2 = 0)$. On n'a donc qu'à s'intéresser aux deux premiers pas de la marche. Sur deux pas de la marche, il y a 4 chemins (à chaque pas, il y a 2 possibilités, donc en tout $2^2 = 4$ possibilités), équiprobables puisqu'à chaque pas la montée ou la descente est équiprobable, et que les résultats des pas sont deux à deux indépendants. Sur ces 4 possibilités, 2 mènent à $S_2 = 0$: $(0,0) \to (1,1) \to (2,0)$ et $(0,0) \to (1,-1) \to (2,0)$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{P}(T = 2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$.
$(T = 4) \Leftrightarrow ((S_4 = 0) \text{ et } (S_2 \neq 0))$. De la même manière que précédemment, il y a 16 possibilités, dont seules 2 sont compatibles : $(0,0) \to (1,1) \to (2,2) \to (3,1) \to (4,0)$ et $(0,0) \to (1,-1) \to (2,-2) \to (3,-1) \to (4,0)$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{P}(T = 4) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}}$.
$(T = 6) \Leftrightarrow ((S_6 = 0) \text{ et } (S_4 \neq 0) \text{ et } (S_2 \neq 0))$. Sur les 6 pas de calcul (donc 64 possibilités), il est un peu plus long de dénombrer les chemins compatibles sans se tromper, et il est ici plus facile de réaliser un arbre (ce qu'on pouvait également faire pour les deux premiers calculs, bien sûr). Dans cet arbre, l'étage numéro i correspond au i^{e} pas de la marche, et on fait figurer à chaque fois la valeur de S_i. On n'a pas fait apparaître les 64 possibilités, mais on a arrêté la construction d'un sous-arbre dès qu'on pouvait conclure. Par ex. si on revient en 0 avant le 6^{e} pas, on est sûr que $T \neq 6$ (idem dès qu'un S_i s'éloigne trop de 0).



Pour la même raison que précédemment, tous les chemins de longueur 6 ont la même probabilité $\left(\frac{1}{2^6}\right)$, et il y en a 4 qui ont 6 comme date de premier retour en 0, donc $\boxed{\mathrm{P}(T = 6) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}}$.

3. On a déjà calculé $\mathrm{P}(S_2 = 0) = \dfrac{1}{2}$, de plus $\mathrm{P}(S_0 = 0) = 1$ donc on a bien $\mathrm{P}(T = 2) = \mathrm{P}(S_0 = 0) - \mathrm{P}(S_2 = 0)$.

   Pour calculer $\mathrm{P}(S_4 = 0) = \dfrac{3}{8}$, on peut soit :

   - Calculer $\mathrm{P}(S_4 = 0) = \mathrm{P}(S_4 = 0 \cap S_2 \neq 0) + \mathrm{P}(S_4 = 0 \cap S_2 = 0)$, car on connaît $\mathrm{P}(S_4 = 0 \cap S_2 \neq 0) = \mathrm{P}(T = 4)$ et de plus $\mathrm{P}(S_4 = 0 \cap S_2 = 0) = \mathrm{P}(S_2 = 0) \times \mathrm{P}_{S_2=0}(S_4 = 0)$; or $\mathrm{P}_{S_2=0}(S_4 = 0) = \mathrm{P}(S_2 = 0) = \dfrac{1}{2}$ puisque de 2 à 4 il y a 2 pas de marche, et l'évenement « revenir à 0 en 2 pas de marche » est exactement l'événement $S_2 = 0$.
   - Ecrire l'arbre de tous les chemins possibles de longueur 4, s'apercevoir que 6 chemins sur les 16 reviennent en 0 au bout des 4 pas.

   Ainsi on retrouve bien $\mathrm{P}(S_2 = 0) - \mathrm{P}(S_4 = 0) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{8} = \mathrm{P}(T = 4)$.

   Pour calculer $\mathrm{P}(S_6 = 0) = \dfrac{3}{8}$, le plus simple est de compléter l'arbre commencé à la question précédente, et de s'apercevoir que 20 chemins sur les 64 reviennent en 0 au bout des 6 pas.

   Ainsi on retrouve bien $\mathrm{P}(S_4 = 0) - \mathrm{P}(S_6 = 0) = \dfrac{3}{8} - \dfrac{5}{16} = \dfrac{1}{16} = \mathrm{P}(T = 6)$.

   Le calcul demandé juste après « se télescope » alors : à part pour le premier et le dernier terme, les probabilités des S_{2n} se simplifient deux à deux puisqu'une fois il est compté en négatif, et dans le terme d'après en positif.

   $\mathrm{P}(T = 2) + \mathrm{P}(T = 4) + \cdots + P(T = 2N) = (\mathrm{P}(S_0 = 0) - \cancel{\mathrm{P}(S_2 = 0)}) + (\cancel{\mathrm{P}(S_2 = 0)} - \cancel{\mathrm{P}(S_4 = 0)}) + \cdots + (\cancel{\mathrm{P}(S_{2N-2} = 0)} - \mathrm{P}(S_{2N} = 0)) = \mathrm{P}(S_0 = 0) - \mathrm{P}(S_{2N} = 0)$.

   Si l'on n'avait pas remarqué cette simplification, on pouvait évidemment démontrer le résultat par récurrence.

4. Puisque $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathrm{P}(S_{2N} = 0) = 0$, on en déduit que $\mathrm{P}(T = 2) + \mathrm{P}(T = 4) + \cdots + P(T = 2N)$ a une limite, et que cette limite est 1.

   Or $(T < +\infty) = (T = 2) \bigsqcup (T = 4) \bigsqcup (T = 6) \bigsqcup \ldots \bigsqcup (T = 100) \bigsqcup \cdots = \displaystyle\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} (T = 2n)$. Effectivement T est fini si et seulement si il existe un nombre entier non nul n tel que $T = 2n$. Donc l'évènement $T < +\infty$ est l'union (infinie, certes, mais disjointe !) des évènements $T = 2n$. Donc sa probabilité est la somme des probabilités des évènements dont il est l'union disjointe :

   $$\mathrm{P}(T < +\infty) = \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} (T = 2n)\right) = \mathrm{P}\left(\lim_{N\to+\infty} \bigsqcup_{n=1}^{N} (T = 2n)\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} (T = 2n)\right) =$$
   $$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(S_{2n} = 0) = \boxed{1}.$$

   Cette notation en « union infinie » est bien sûr hors programme, mais cette égalité pour les unions finies est également vraie pour les unions infinies (ce n'est pas démontrable, c'est dans les axiomes de la théorie des probabilités modernes).

5. Puisque la marche aléatoire revient en 0 avec une probabilité de 1, eh bien partant de là, elle va encore revenir en 0, etc.

   $\boxed{\text{Elle revient donc en 0 une infinité de fois avec une probabilité de 1}}$.