Antibiotique **4 points**

1. Puisque chaque heure le nombre de bactéries est divisé par 4, on a $\boxed{u_{n+1} = u_n/4}$.
2. On vient de montrer qu'on passe de n'importe quel terme de la suite au suivant en multipliant toujours par le même nombre, $\frac{1}{4} = 0,25$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $0,25$. Son premier terme est $u_0 = 10\ 000\ 000\ 000$.
   On peut donc écrire $u_n = u_0 \times raison^n = \boxed{10\ 000\ 000\ 000 \times 0,25^n}$.
3. On veut trouver la première valeur de n pour laquelle $10\ 000\ 000\ 000 \times 0,25^n \leq 100$. On peut regarder à la calculatrice avec le tableau de valeurs (on verra plus tard dans l'année une autre méthode à l'aide du logarithme).
   On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante puisque sa raison $0,25 \in]0;1[$. De plus, $u_{13} > 100$ et $u_{14} < 100$, ainsi $\boxed{\text{le nombre de bactéries devient inférieur à 100 au bout de 14 heures}}$.

Résolution d'équation **3 points**

1. Calculons le discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$. Ainsi l'équation a une solution réelle double : $z = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2\times 4} = \dfrac{1}{2}$. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$
2. Calculons le discriminant : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 64 + 80 = 144$. Ainsi l'équation a deux solutions réelles distinctes : $z_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8 \pm 12}{2 \times 2}$. $\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 5\}}$
3. Calculons le discriminant : $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4$. Ainsi l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_\pm = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i$. $\boxed{\mathcal{S} = \{\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i\}}$

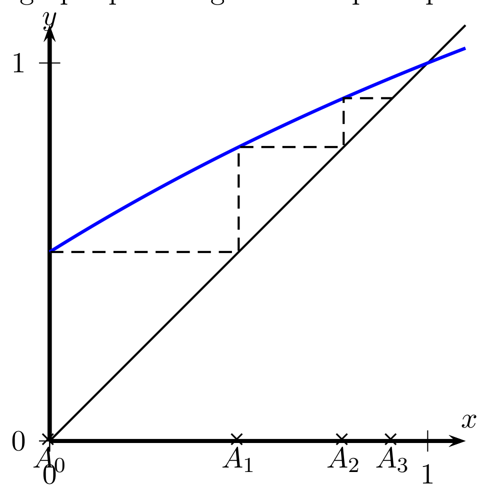
Problème **10 points**

1. La fonction f est définie sur I car $-4 \notin I$. Elle est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables sur I (telles que le dénominateur ne s'y annule pas) et $\forall x \in I : f'(x) = \dfrac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \dfrac{10}{(x+4)^2}$.

x	0	1
Sgn. $f'(x)$	$+$	
Var. f	$0,5$ ↗	1

Une lecture du tableau de variations nous convainc que $\forall x \in [0;1], f(x) \in [f(0); f(1)] = \left[\frac{1}{2}; 1\right] \subset I$. On sera plus précis sur ce point dans le chapitre "continuité". On en déduit que $\boxed{\forall x \in I, f(x) \in I}$.

2. On procède par récurrence sur n.
   Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0 \in I$ et la propriété est vérifiée.
   Hérédité : Supposons que pour un entier n donné on ait $u_n \in I$. Nous savons que $u_{n+1} = f(u_n)$ et en appliquant la résultat de la question précédente, nous obtenons $u_{n+1} \in I$.
   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I}$.
3. (a) Représentation graphique (unité graphique changée en 5cm pour que la correction tienne sur une feuille).



(b) On peut conjecturer que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante et convergente vers } 1}$.

(c) Calculons la différence $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \dfrac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$

Le dénominateur est positif, étudions le numérateur, trinôme du second degré : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$. Les racines sont donc $x_- = \frac{1-3}{2\times(-1)} = 1$ et $x_+ = \frac{1+3}{2\times(-1)} = -2$.

Puisque pour tout n, on a $0 \leq u_n \leq 1$, u_n se situe donc entre les deux racines -2 et 1 donc le numérateur est positif (on pouvait également voir la factorisation $(1 - u_n)(u_n + 2)$)

On en déduit $u_{n+1} - u_n > 0$. Par conséquent $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

(d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente vers un réel l.

Remarque : $0 \leq u_n \leq 1$ implique $0 \leq l \leq 1$ par passage à la limite dans ces inégalités, mais on n'a pas plus d'information sur l.

(e) Admettons que $l = f(l)$. Résolvons donc l'équation $l = \dfrac{3l + 2}{l + 4} \Leftrightarrow l^2 + l - 2 = 0$

Cette équation a deux solutions : 1 et -2 (c'est le même trinôme que précédemment). Puisque $l \in I$ et $-2 \notin I$, nous en déduisons $\boxed{l = 1}$.

4. (a) On calcule v_{n+1} en fonction de v_n :

$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \dfrac{3u_n + 2 - (u_n + 4)}{3u_n + 2 + 2(u_n + 4)} = \dfrac{2u_n - 2}{5u_n + 10} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} = \dfrac{2}{5} \times v_n$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{2}{5}}$.

(b) On a $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$ et d'après le cours $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$.

(c) On remarque d'abord : $v_n = 1 - \dfrac{3}{u_n + 2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{u_n + 2} = 1 - v_n$.

On en déduit : $u_n + 2 = \dfrac{3}{1 - v_n} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{3}{1 - v_n} - 2 = \boxed{\dfrac{1 + 2v_n}{1 - v_n}}$.

D'où le résultat : $\boxed{u_n = \dfrac{1 - (\frac{2}{5})^n}{1 + \frac{1}{2} \times (\frac{2}{5})^n}}$.

(d) Sachant $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ et les opérations sur les limites nous permettent de conclure que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$.

Bonus **2 points**

Soit $q > 1$. Alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Idée de la preuve : Minorer cette suite par une suite divergeant vers $+\infty$ et appliquer le 1.

Preuve : Soient $a > 0$ et P_n la propriété « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ». Démontrons que cette propriété est vraie sur $\mathbb{N}$ par récurrence sur n :

- Initialisation : $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc on a bien $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \times a$.
- Hérédité : supposons que $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Alors :

$$\begin{aligned}
(1+a)^n + 1 &= (1+a) \times (1+a)^n && \text{On utilise l'hypothèse de récurrence} \\
&\geq (1+a) \times (1+na) && \text{On développe} \\
&\geq 1 + na + a + na^2 && \text{On fait apparaître le } (n+1)a \text{ de } P_{n+1} \\
&\geq 1 + (n+1)a + na^2 && na^2 \geq 0 \\
&\geq 1 + (n+1)a
\end{aligned}$$

On vient bien de démontrer P_{n+1}.

- Conclusion : On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Maintenant puisque $q > 1$ alors $q = 1 + (q - 1)$ avec $(q - 1) > 0$. On peut donc utiliser la propriété P_n avec $a = q - 1$: $\forall n \in \mathbb{N}, q^n \geq 1 + n(q - 1)$. Or la suite de droite est une suite arithmétique de raison $q - 1 > 0$ donc diverge vers $+\infty$. On n'a plus qu'à appliquer le théorème démontré en ROC.$\square$