On accordera une attention particulière, à ce devoir comme à tous les autres, à l'orthographe, la présentation et la rédaction des réponses.

1 Niveau 1

Restitution organisée de connaissances

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Exprimer l'inégalité triangulaire portant sur z_1 et z_2, et démontrer cette inégalité.

Exercice 1.1 - Adapté d'Antilles-Guyane, Septembre 2008

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

2. On considère les points A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_{C}.
   (a) Déterminer la forme exponentielle de z_{A}, z_{B} et z_{C}.
   (b) Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.
   (c) Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 1.2

Pour chacun des nombres complexes suivants, donner leur partie réelle, leur partie imaginaire, et leur conjugué :

1. -5
2. $i^4 - 7i$
3. $i + i^2 + i^3$

Exercice 1.3 - Donné par les inspecteurs en 2009

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte des points mais une réponse inexacte en enlève. Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions : cela ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

On inscrira sur la copie le numéro et la lettre de la réponse choisie.

1. On considère la suite arithmétique (u_n) telle que $u_1 = 12$ et $u_3 = 48$

   Quelle est la raison de cette suite ?

a	b	c	d
2	18	-2	12

2. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 14\ 000$ et de raison 100 et la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 6\ 500$ et de raison 1,1.

   À partir de quelle valeur de n a-t-on : $u_n < v_n$?

a	b	c	d
9	131	8	jamais

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2n + 5$.

   Quelle est la nature de (u_n) ?

a	b	c	d
Suite géométrique de raison 2	Suite géométrique de raison 5	Suite arithmétique de raison 2	Suite arithmétique de raison 5

2 Niveau 2

Restitution organisée de connaissances

Soit u une suite croissante et non majorée. Que peut-on dire de la limite éventuelle de la suite u ? Démontrer le résultat.

Exercice 2.1 - Donné par les inspecteurs en 2003

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte des points mais une réponse inexacte en enlève. Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions : cela ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

On inscrira sur la copie le numéro et la lettre de la réponse choisie.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z} + |z| = 6 + 2\mathrm{i}$. Écrire z sous forme algébrique.

   (a) $\frac{8}{3} - 2\mathrm{i}$ (b) $-\frac{8}{3} - 2\mathrm{i}$ (c) $\frac{8}{3} + 2\mathrm{i}$ (d) $-\frac{8}{3} + 2\mathrm{i}$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ vérifiant $|z - 1| = |z + \mathrm{i}|$ est la droite d'équation :

   (a) $y = x - 1$ (b) $y = -x$ (c) $y = -x + 1$ (d) $y = x$

3. $\left(2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{R}$ si et seulement si n s'écrit sous la forme (où $k \in \mathbb{N}$) :

   (a) $3k + 1$ (b) $3k + 2$ (c) $3k$ (d) $6k$

4. Soit l'équation (E) : $z = \dfrac{6 - z}{3 - z}$ $(z \in \mathbb{C})$. Une solution de (E) est :

   (a) $-2 - \mathrm{i}\sqrt{2}\mathrm{i}$ (b) $2 + \mathrm{i}\sqrt{2}$ (c) $1 - \mathrm{i}$ (d) $-1 - \mathrm{i}$

5. Soient deux points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = \sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $(0; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$. L'affixe z_{C} du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ est :

   (a) $-\mathrm{i}$ (b) $2\mathrm{i}$ (c) $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ (d) $\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$

Exercice 2.2

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 - n^5$. Que vaut $\lim u_n$?
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n^4 - 1}{n^3 + 1}$. Que vaut $\lim v_n$?
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sqrt{n + 3} - \sqrt{n}$. Que vaut $\lim w_n$?

3 Niveau 3

Restitution organisée de connaissances

Soit $q > 1$. Quelle est la limite de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$? Démontrer le résultat.

Exercice 3.1

1. On pose $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 7 + i$. Calculer $|z_1 z_2|$ et $\mathcal{I}m\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $z^2 + 2z + 3 = 0$.

Exercice 3.2 - Métropole & La Réunion, Septembre 2008

ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$ de centre I. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = AB$ est :

1. la médiatrice de [AC].
2. le cercle circonscrit au carré ABCD.
3. la médiatrice de [AI].
4. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

Exercice 3.3

Donner l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant :

$$x^2 + 2x + y^2 - 8 = 0$$

<u>Indication :</u> reconnaître dans $x^2 + 2x$ le début d'un carré (cf. "méthode de Gauss" dans la factorisation de $ax^2 + bx + c$), puis une équation de cercle.

Exercice 3.4

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{sin(n) + 3}{n}$. Que vaut $\lim u_n$?
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3n + 5}{2n - 1}$. Que vaut $\lim v_n$?

3 Niveau 3

Restitution organisée de connaissances

Soit $q > 1$. Quelle est la limite de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$? Démontrer le résultat.

Exercice 3.1

1. On pose $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 7 + i$. Calculer $|z_1 z_2|$ et $\mathcal{I}m\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $z^2 + 2z + 3 = 0$.

Exercice 3.2 - Métropole & La Réunion, Septembre 2008

ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$ de centre I. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = AB$ est :

1. la médiatrice de [AC].
2. le cercle circonscrit au carré ABCD.
3. la médiatrice de [AI].
4. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

Exercice 3.3

Donner l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant :

$$x^2 + 2x + y^2 - 8 = 0$$

<u>Indication :</u> reconnaître dans $x^2 + 2x$ le début d'un carré (cf. "méthode de Gauss" dans la factorisation de $ax^2 + bx + c$), puis une équation de cercle.

Exercice 3.4

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{sin(n) + 3}{n}$. Que vaut $\lim u_n$?
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3n + 5}{2n - 1}$. Que vaut $\lim v_n$?