# 1 Commun à tous les élèves

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - x^4$ : c'est une forme indéterminée « $+\infty - (+\infty)$ ». On lève l'indétermination en factorisant : $x^3 - x^4 = x^3(1-x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\}\text{par soustraction}\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x = -\infty\\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty\end{array}\right\}\text{par produit}\ \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = -\infty}.$$

2. Posons $f : x \mapsto x^2 - x$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors $b = g \circ f$. Il faut donc que l'on étudie la limite $l$ de $f(x)$ en $+\infty$ puis la limite de $g(x)$ en $l$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x$ : c'est une forme indéterminée « $+\infty - (+\infty)$ ». On lève l'indétermination en factorisant, exactement comme en 1) : $x^2 - x = x(x-1)$. Par somme et produit, on trouve que la limite est $+\infty$.

   Ainsi $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} & = & +\infty\end{array}\right\}$ par composition $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = +\infty}$.

   Pour que $b(x)$ ait un sens, il faut que le radical soit positif, donc que $x^2 - x \geq 0$. C'est un trinôme du second degré, on peut donc étudier son signe à l'aide du discriminant, si on ne pense pas à utiliser la forme factorisée qu'on vient de trouver $x(x-1)$.
   Le tableau de signes de cette expression est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sgn.** $x(x-1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   Ainsi $\boxed{D_b = ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[}$.

3. $\boxed{\mathcal{C}_c \text{ a une asymptote horizontale d'équation } y = -2}$.

   Effectivement $c(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 3}{x^2 + x - 2} = \dfrac{x^2(-2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})} = \dfrac{-2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$. Il apparaît alors clairement que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c(x) = -2$, d'où l'asymptote horizontale.

   Déterminer la position de $\mathcal{C}_c$ par rapport à cette droite, c'est la même chose que d'étudier la position de $\mathcal{C}_c$ par rapport à $\mathcal{C}_j$ avec $j : x \mapsto -2$. Il faut donc étudier le signe de $c(x) - j(x)$ :
   $c(x) - j(x) = c(x) - (-2) = c(x) + 2 = \dfrac{-2x^2 + x + 3}{x^2 + x - 2} + 2 = \dfrac{-2x^2 + x + 3 + 2(x^2 + x - 2)}{x^2 + x - 2} = \dfrac{-2x^2 + x + 3 + 2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2} = \dfrac{3x - 1}{x^2 + x - 2}$.
   Au dénominateur on a un trinôme de discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$. Les racines sont $x_\pm = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$ c'est à dire $x_+ = 1$ et $x_- = -2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sgn.** $3x-1$ | | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | |
| **Sgn.** $x^2+x-2$ | | $+$ | $0$ | | $-$ | | $0$ | $+$ | |
| **Sgn.** $c(x)+2$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

   On peut donc lire que $\mathcal{C}_c$ est au-dessus de cette asymptote sur $\left]-2; \dfrac{1}{3}\right[ \cup ]1; +\infty[$, et que $\mathcal{C}_c$ est en-dessous de cette asymptote sur $]-\infty; -2[ \cup \left]\dfrac{1}{3}; 1\right[$.

## 2 Choisir entre les deux sous-parties

### 2.1 Niveau de difficulté normale

1. Pour avoir comme asymptote la droite d'équation $y = 3$, il faut qu'on ait comme limite 3 en $+\infty$ et/ou en $-\infty$. Pour avoir comme asymptote la droite d'équation $x = 1$, il faut avoir une limite infinie en $1^+$ et/ou en $1^-$.
   La fonction $f : x \mapsto 3 + \dfrac{1}{x-1}$ répond à la question.
2. La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, donc on ne peut pas conclure par les opérations usuelles sur les limites. Il faut penser ici au théorème des gendarmes :
   $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq sin(x) \leq 1$
   De plus $\forall x > 1$, $x^2 - 1 > 0$ donc on peut diviser chaque membre de l'inéquation par $x^2 - 1$ au voisinage de $+\infty$, il vient alors :
   $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{-1}{x^2-1} \leq \dfrac{sin(x)}{x^2-1} \leq \dfrac{1}{x^2-1}$
   Clairement les membres de gauche et de droite tendent vers 0 en $+\infty$ donc on est bien dans le cas d'application du théorème des gendarmes, et ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e(x) = 0}$.

   En 1 : le numérateur tend vers $sin(1)$ qui est positif (sin est positif entre 0 et $\pi$). Le dénominateur tend vers 0. C'est une forme indéterminée, il faut donc savoir si c'est $0^+$ ou $0^-$.
   Le tableau de signes du dénominateur est :

   | $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|---|---|---|---|
   | **Sgn.** $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} e(x) = -\infty}$, et $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} e(x) = +\infty}$.

### 2.2 Niveau de difficulté améliorée

1. Posons $r : x \mapsto x - 3$, $s : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $t : x \mapsto sin(x)$. Alors $f = t \circ s \circ r$. Il faut donc que l'on étudie la limite $l_1$ de $r(x)$ en 3 puis la limite $l_2$ de $s(x)$ en $l_1$ puis la limite de $t(x)$ en $l_2$.
   Ici clairement $D_f = ]3; +\infty[$ donc il va falloir regarder en $3^+$ :
   $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 3^+} r(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} s(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{par composition } \lim\limits_{x \to 3^+} s \circ r(x) = +\infty \\ t \text{ n'a pas de limite en } +\infty\end{array}\right\} \text{par composition } \boxed{f \text{ n'a pas de limite en } 3^+}.$$
   En $+\infty$ :
   $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} r(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = 0\end{array}\right\} \text{par composition } \lim\limits_{x \to +\infty} s \circ r(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} t(x) = 0\end{array}\right\} \text{par composition } \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}.$$
2. $\lim\limits_{x \to 1^\pm} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ : c'est une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ». On lève l'indétermination en multipliant en haut et en bas par la quantité conjuguée (de l'expression avec un radical). De plus comme $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc il va falloir regarder en $1^+$ et en $1^-$.
   $$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{(\sqrt{x+3})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x+3-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$
   Posons $h : x \mapsto x + 3$ et $i : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors $g : x \mapsto \sqrt{x+3}$ est aussi égale à $g = i \circ h$.
   $$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x \to 1} x+3 &=& 4 \\ \lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} &=& 2\end{array}\right\} \text{par composition, } \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+3} = 2.$$
   Ensuite par somme puis quotient, il vient simplement que $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^\pm} a(x) = \dfrac{1}{4}}$.