Devoir surveillé n°6 Mercredi 29 janvier 2014

On accordera une attention particulière, à ce devoir comme à tous les autres, à l'orthographe, la présentation et la rédaction des réponses.

La restitution organisée de connaissances ainsi que l'exercice 1 doivent être traités par tous les élèves.

Il y a ensuite le choix (qu'il s'agit d'écrire sur la copie !) entre :
- la partie de niveau de difficulté « normale », pour 9 points
- la partie de niveau de difficulté « améliorée », pour 12 points

Commun à tous les candidats (10 points)

Restitution organisée de connaissances

Soient A et B deux événements indépendants. Démontrer qu'il en est de même pour $\overline{\mathrm{A}}$ et B.

Exercice 1 - Adapté de Pondichéry, Avril 2012

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 5 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.

À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ; $c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ; $e :=$ rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

   (a) Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2 \ ; \ 11 \ ; \ 44 \ ; \ 2 \ ; \ 15\}; L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}; L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

   (b) Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

2. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. On note, pour $i \in [|1; 5|]$, C_i l'événement « ce coureur a subi le contrôle prévu pour l'étape i ». On admet que pour tout i, $\mathrm{P}(C_i) = 0,1$.

   Pour chacun des événements suivants, exprimer cet événement en fonction des C_i, et calculer sous forme décimale arrondie au dix-millième, la probabilité de cet évènement :
   - ce coureur a été contrôlé 5 fois exactement ;
   - ce coureur n'a pas été contrôlé ;
   - ce coureur a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

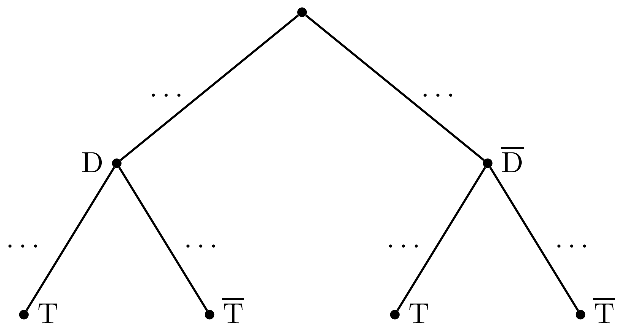
Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.

On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».

Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Les événements T et D sont-ils indépendants ?
2. Recopier l'arbre suivant et compléter son second étage :



3. Calculer $P(D)$. Terminer de compléter l'arbre de la question précédente.
4. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

Difficulté normale (9 points)

Exercice 2.1 - Adapté de Polynésie, Septembre 2010

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   (c) Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
   Indication : on pourra utiliser le fait que $g(\alpha) = 0$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Difficulté améliorée (12 points)

Exercice 2.2 - Donné par les inspecteurs en 2003

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos(x) + x$.
   En déduire que l'équation $cos(x) + x = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
2. On considère l'équation (E) $sin(x) - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.
   (b) Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).
   (c) Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.

Exercice 3.2 - Adapté de Métropole, Septembre 2001

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(0; \vec{i}\ ; \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture pour tout x réel strictement positif : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\Big)$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Démontrer que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis calculer $f'(x)$, pour x dans $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f.
4. Construire la courbe $\mathcal{C}$ (unité graphique : 2 cm). On admettra que $\mathcal{C}$ est tangente en O à l'axe des ordonnées.