Exercice 1 - Adapté de Pondichéry, Avril 2012

Partie A

1. (a) La condition de la boucle fait que tant que deux des cinq nombres sont égaux, on relance un quintuplet. Ainsi L_1 est impossible (deux « 2 »), L_3 est impossible (deux « 17 »). Donc seuls $\boxed{L_2 \text{ et } L_4}$ ont pu être obtenus avec cet algorithme.
   (b) Cet algorithme permet de choisir au hasard un quintuplet de cycliste à contrôler à chaque étape.
2. Rajoutons des notations pour simplifier l'écriture :
   - D = « ce coureur a été contrôlé 5 fois exactement » ;
   - E = « ce coureur n'a pas été contrôlé » ;
   - F = « ce coureur a été contrôlé au moins une fois ».

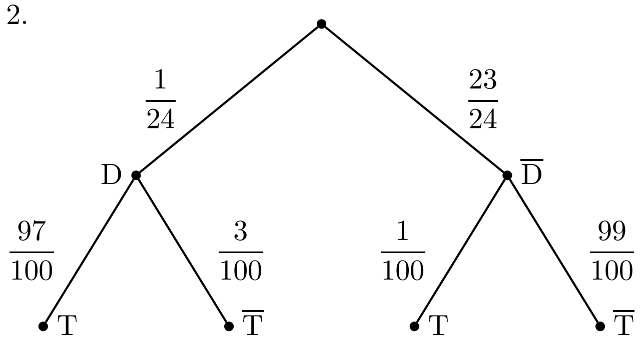
Pour avoir été contrôlé 5 fois exactement sur les 5 étapes, il a du être contrôlé à chaque fois :
$\boxed{D = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5}$.
Or, tous les C_i sont indépendants, donc :
$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(C_1) \times \mathrm{P}(C_2) \times \mathrm{P}(C_3) \times \mathrm{P}(C_4) \times \mathrm{P}(C_5) = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,00001 \approx \boxed{0}$.

Pour ne pas avoir été contrôlé, il a du éviter le contrôle à chaque fois : $\boxed{E = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \overline{C_4} \cap \overline{C_5}}$.
D'après la ROC, puisque les C_i sont indépendants, les $\overline{C_i}$ aussi ! Donc :
$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(\overline{C_1}) \times \mathrm{P}(\overline{C_2}) \times \mathrm{P}(\overline{C_3}) \times \mathrm{P}(\overline{C_4}) \times \mathrm{P}(\overline{C_5}) = 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,59049 \approx \boxed{0,5905}$.

Il faut se rendre compte que $F = \overline{E}$ donc $\boxed{F = \overline{\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \overline{C_4} \cap \overline{C_5}}}$.
Ainsi $\mathrm{P}(F) = 1 - \mathrm{P}(E) = 1 - 0,59049 = 0,40951 \approx \boxed{0,4095}$.
Remarque : on peut aussi écrire que pour que F soit vrai, il faut qu'au moins un des C_i soit vrai, donc $\boxed{F = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5}$.

Partie B

1. L'énoncé nous dit que $\mathrm{P}_D(T) = \dfrac{97}{100}$ et $\mathrm{P}_{\overline{D}}(T) = \dfrac{1}{100}$ donc $\boxed{T \text{ et } D \text{ ne sont pas indépendants}}$.
2.



3. On sait que $\mathrm{P}(T) = 0,05$. En lisant sur l'arbre, $\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}(D) \times 0,97 + (1 - \mathrm{P}(D)) \times 0,01$.
   Ainsi $0,05 = 0,96\mathrm{P}(D) + 0,01$ donc $\mathrm{P}(D) = \dfrac{0,04}{0,96} = \boxed{\dfrac{1}{24}}$.
4. L'énoncé demande $\mathrm{P}_T(\overline{D})$. On peut calculer $\mathrm{P}_T(\overline{D}) = \dfrac{\mathrm{P}(T \cap \overline{D})}{\mathrm{P}(T)} = \dfrac{\frac{23}{24} \times \frac{1}{100}}{\frac{5}{100}} = \dfrac{23}{120}$.
   Si un coureur a un contrôle positif, la probabilité qu'il ne soit pas dopé est de $\boxed{\dfrac{23}{120}}$.

Exercice 2.1 - Adapté de Polynésie, Septembre 2010

Partie A

1. Telle qu'elle est écrite, c'est une forme indéterminée « $+\infty - (+\infty)$ ». On va donc factoriser par e^x : $g(x) = \mathrm{e}^x(1 - x) + 1$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-x = -\infty\end{array}\right\}\text{par produit}\quad \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x(1-x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1\end{array}\right\}\text{par somme} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

2. Pour étudier les variations de la fonction g, nous allons étudier le signe de sa dérivée.
   $g(x)$ est la somme de trois termes. Le terme du milieu est un produit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & x \\ v(x) & = & \mathrm{e}^x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

   Donc $g'(x) = \mathrm{e}^x - [1\times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x] + 0 = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$.
   g' est clairement strictement négative partout sauf en 0 où elle s'annule, donc g est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3.

x	0		$+\infty$
sgn. $-x$	0	$-$	
sgn. e^x		$+$	
sgn. $g'(x)$	0	$-$	
var. g	2	$\searrow$	$-\infty$

4. (a) $$\left.\begin{array}{l} g \text{ est strictement décroissante sur } [0;+\infty[\\ g \text{ est continue sur } [0;+\infty[\\ g(0) = 2 \\ g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ 0 \in]-\infty;2] \end{array}\right\}$$

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas strictement monotone :
   $\exists ! x \in [0;+\infty[$ tel que $g(x) = 0$.

   (b) Pour la valeur approchée, on procède par encadrements successifs (balayage) :
   - $g(1) = 1 > 0$ et $g(2) \approx -6,4 < 0$ donc $1 < \alpha < 2$
   - $g(1,2) \approx 0,34 > 0$ et $g(1,3) \approx -0,1 < 0$ donc $1,2 < \alpha < 1,3$
   - $g(1,27) \approx 0,04 > 0$ et $g(1,28) \approx -0,007 < 0$ donc $1,27 < \alpha < 1,28$

   On peut donc écrire $\boxed{\alpha \in [1,27;1,28]}$.

   (c) α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 0 && \text{On remplace par la valeur} \\ \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 &= 0 && -1 \\ \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha &= -1 && \text{On factorise par } \mathrm{e}^\alpha \\ \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) &= -1 && \div(1-\alpha) \\ \mathrm{e}^\alpha &= \frac{1}{\alpha - 1} \end{aligned}$$

5. Puisque g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, on en déduit que g est strictement positive sur $[0;\alpha[$, s'annule en α, et est strictement négative sur $]\alpha;+\infty[$.
   On déduit le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
Sgn. $g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. $A(x)$ est un quotient :

$$\begin{cases} u(x) & = & 4x \\ v(x) & = & \mathrm{e}^x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) & = & 4 \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^x \end{cases}$$

Donc $A'(x) = \dfrac{4 \times (\mathrm{e}^x + 1) - 4x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{4\mathrm{e}^x + 4 - 4x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{4(\mathrm{e}^x + 1 - x\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.

Ainsi $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

2. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		α		$+\infty$
Sgn. $A'(x)$		$+$	0	$-$	
Var. A	0	$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	0

Exercice 2.2 - Donné par les inspecteurs en 2003

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -sin(x) + 1$.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, sin(x) \leq 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$. Ainsi $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$. On pouvait s'arrêter là pour le sens de variations, mais on pouvait raffiner.

Comme de plus $f'(x)$ ne s'annule que si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs sur tout intervalle I de longueur finie de $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur tout intervalle de longueur finie de $\mathbb{R}$. Parce qu'un dessin vaut mieux qu'un long discours :

x	$-\infty$		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
Var. f	$\ldots$					$\nearrow$							$\ldots$

Pour localiser les solutions, la simple croissance suffisait. Il suffit de remarquer (par exemple) que $f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$ donc puisque f est croissante, elle ne peut s'annuler que sur cet intervalle (avant elle est plus petite que $-\frac{\pi}{2}$, après elle est plus grande que 1).

Sur cet intervalle, comme on l'a remarqué f est strictement croissante et continue, donc puisqu'elle est négative au début et positive à la fin, elle s'y annule, et une unique fois.

Pour la valeur approchée, on procède par encadrements successifs (balayage) :

- $f(-0,8) \approx -0,10 < 0$ et $f(-0,7) \approx 0,06 > 0$ donc $-0,8 < \alpha < -0,7$
- $f(-0,74) \approx -0,002 < 0$ et $f(-0,73) \approx 0,02 > 0$ donc $-0,74 < \alpha < -0,73$
- $f(-0,74) \approx -0,002 < 0$ et $f(-0,739) \approx 0,0001 > 0$ donc $-0,74 < \alpha < -0,739$

On peut donc écrire $\boxed{\alpha \approx -0,739 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

2. Posons la fonction $g : x \mapsto sin(x) - \frac{x}{2}$.

(a) Regardons ce qu'il se passe en dehors de l'intervalle.

Si $x < -2$, $-\frac{x}{2} > 1$ donc $sin(x) - \frac{x}{2} > 0$ (car $sin(x) \geq -1$). Donc $g(x) > 0$ sur $]2; +\infty[$.

Si $x > 2$, $-\frac{x}{2} < -1$ donc $sin(x) - \frac{x}{2} < 0$ (car $sin(x) \leq 1$). Donc $g(x) < 0$ sur $]-\infty; -2[$.

Ainsi $\boxed{g \text{ ne peut s'annuler que sur } [-2; 2]}$.

(b) Etudions maintenant les variations de g sur l'intervalle $[-2; 2]$. $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = cos(x) - \frac{1}{2}$.

Elle s'annule lorsque $cos(x) = \frac{1}{2}$ c'est à dire, sur cet intervalle, lorsque $x = -\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$. Les variations de la fonction cos font que sur cet intervalle, $cos(x) > \frac{1}{2}$ sur $]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}[$:

x	-2		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		2
Sgn. $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Var. g	$g(-2)$	$\searrow$	$g(-\frac{\pi}{3})$	$\nearrow$	$g(\frac{\pi}{3})$	$\searrow$	$g(2)$

Dans ce tableau $g(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ et $g(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$.

Sur $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$, g est strictement croissante. De plus $g(0) = 0$, c'est donc l'unique solution sur cet intervalle.

Sur $[\frac{\pi}{3}; 2]$, g est strictement décroissante et continue. Elle réalise donc une bijection de $[\frac{\pi}{3}; 2]$ sur $[g(2); g(\frac{\pi}{3})]$. De plus $g(\frac{\pi}{3}) > 0$ et $g(2) < 0$ donc il y a une unique solution sur cet intervalle (que l'on notera β, c'est la plus grande solution qu'on demande à la question suivante).

Sur $[-2; -\frac{\pi}{3}]$, g est strictement décroissante et continue. Elle réalise donc une bijection de $[-2; -\frac{\pi}{3}]$ sur $[g(-\frac{\pi}{3}); g(-2)]$. De plus $g(-\frac{\pi}{3}) < 0$ et $g(-2) > 0$ donc il y a une unique solution sur cet intervalle. On pouvait remarquer que cette solution est exactement $-\beta$, parce que g est impaire.

Il y a donc $\boxed{\text{3 solutions}}$ à cette équation.

(c) On procède encore par encadrements successifs (balayage) :
- $g(1,8) \approx 0,07 > 0$ et $g(1,9) \approx -0,004 < 0$ donc $1,8 < \beta < 1,9$
- $g(1,89) \approx 0,004 > 0$ et $g(1,9) \approx -0,004 < 0$ donc $1,89 < \beta < 1,90$
- $g(1,895) \approx 0,0004 > 0$ et $g(1,896) \approx -0,0004 < 0$ donc $1,895 < \beta < 1,896$

On peut donc écrire $\boxed{\beta \approx 1,895 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

Exercice 3.2 - Adapté de Métropole, Septembre 2001

1. Il est clair que $\forall x > 0, \sqrt{x} = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ et $e^{1-x} = e^1 \times e^{-x} = \dfrac{e}{e^x}$.

   On a donc bien l'égalité $\forall x > 0, f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} \times \dfrac{e}{e^x} = \dfrac{e}{\sqrt{x}} \times \dfrac{x}{e^x}$.

   $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} e & = & e \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par quotient, } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{\sqrt{x}} = 0 \\ \text{On sait de plus que } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0. \end{array}\right\} \text{par produit, } \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}.$$

   Graphiquement, cela veut dire que $\boxed{\text{l'axe des abscisses est asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty}$.

2. $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto e^{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur l'intersection de ces ensembles c'est à dire $]0; +\infty[$.

   $$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{1-x} + \sqrt{x} \times (-1)e^{1-x} = e^{1-x}(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \boxed{e^{1-x} \times \frac{1-2x}{2\sqrt{x}}}.$$

3. On peut ainsi construire le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Sgn. e^{1-x}		$+$	$+$	$+$	
Sgn. $1-2x$		$+$	0	$-$	
Sgn. $2\sqrt{x}$	0	$+$	$+$	$+$	
Sgn. $f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
Var. f	0	$\nearrow$	$\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0