On accordera une attention particulière, à ce devoir comme à tous les autres, à l'orthographe, la présentation et la rédaction des réponses.

La restitution organisée de connaissances ainsi que les exercices 1 et 2 doivent être traités par tous les élèves.

Il y a ensuite le choix (qu'il s'agit d'écrire sur la copie !) entre :
- la partie de niveau de difficulté « normale », pour 4,5 points
- la partie de niveau de difficulté « améliorée », pour 6 points

Commun à tous les candidats

Restitution organisée de connaissances 1 point

On considère a et b deux nombres réels et f une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$. On admettra que :
- f admet un minimum sur $[a\ ;\ b]$
- si g est une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, la fonction G définie sur $[a\ ;\ b]$ par $G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et a pour dérivée g.

Démontrer que f admet des primitives.

Exercice 1 - Polynésie, Juin 2013 9 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

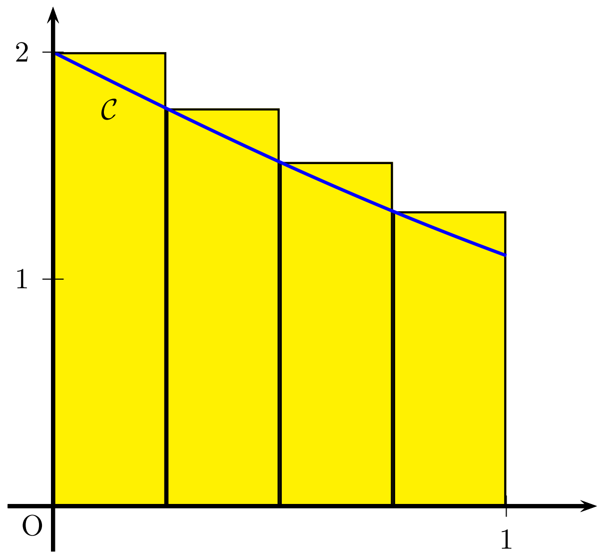
$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.
   (b) Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$.
   (c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.
   On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.
   (a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}\ ;\ 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-contre.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

```
Variables :       k est un nombre entier
                  S est un nombre réel
Initialisation :  Affecter à S la valeur 0
Traitement :      Pour k variant de 0 à 3
                  |  Affecter à S la valeur S + (1/4) f(k/4)
                  Fin Pour
Sortie :          Afficher S
```

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

(b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

(a) Démontrer que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

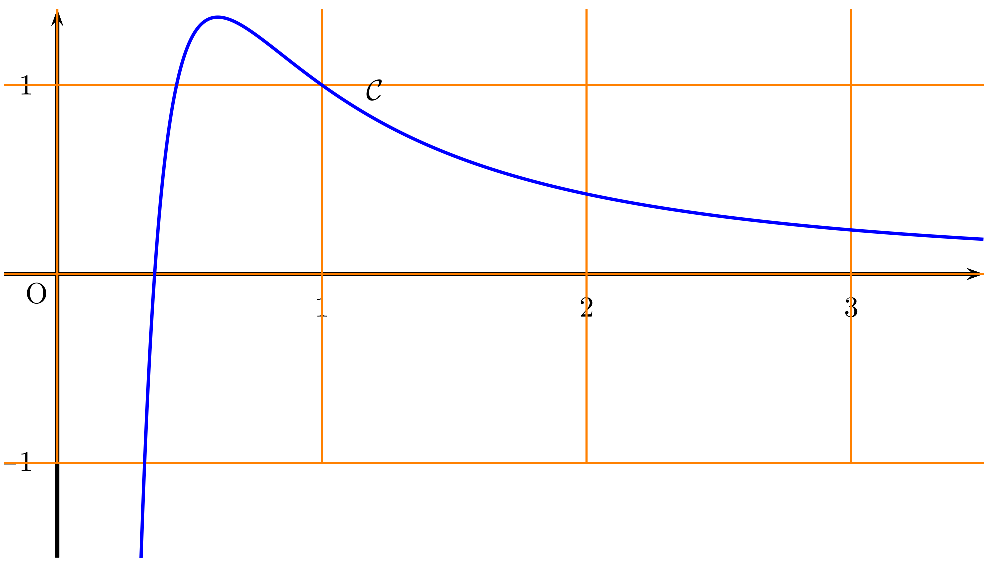
(c) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $\mathcal{A}$ par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

Exercice 2 - Adapté de Amérique du nord, Mai 2013 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1. (a) Étudier la limite de f en 0.

(b) Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

(c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$
   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   Indication : on rappelle que pour tout y réel, $\ln(e^y) = y$.

   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

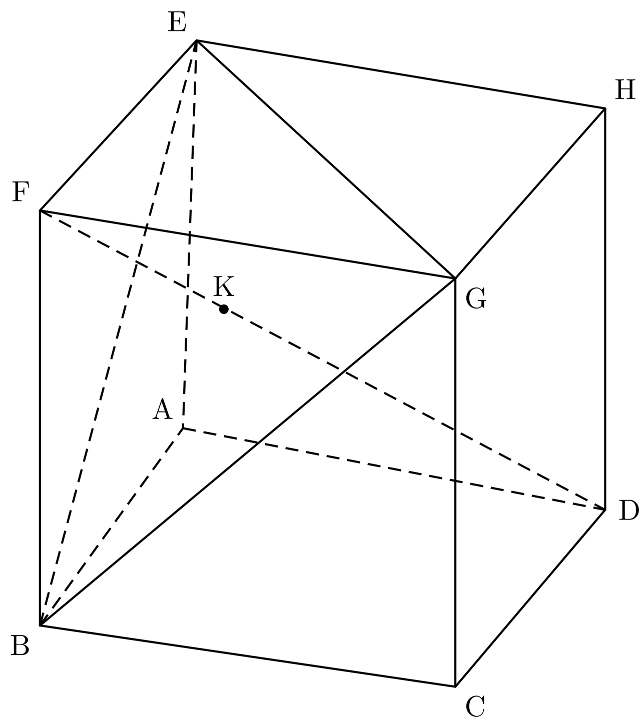
3. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3 - Difficulté normale - Adapté de Polynésie, Septembre 2010 4,5 points

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

Cela veut dire que les coordonnées des points sont : $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$. On place de plus le point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

Dans la suite de l'exercice, on admet qu'on peut utiliser la formule de la distance comme en 2de : si $M(x_M;y_M;z_M)$ et $N(x_N;y_N;z_N)$ alors $MN = \sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2+(z_N-z_M)^2}$.



1. Citer deux droites non coplanaires.
2. Quelle est la nature de l'intersection des plans (BEG) et (ABC) ? Expliquer comment construire graphiquement cette intersection.
3. Soit L le point d'intersection de la parallèle à (BF) passant en K et de la droite (BD). Calculer la longueur BL.
4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.
5. Montrer que le triangle BDK est un triangle rectangle.
6. En déduire le volume du tétraèdre BEGD.

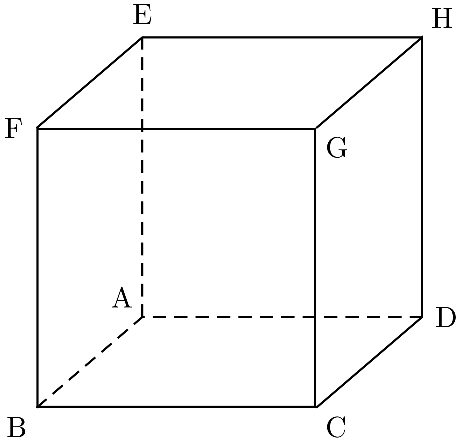
Exercice 3.2 - Difficulté améliorée - Adapté de Centres étrangers, Juin 2012 6 points

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

Cela veut dire que les coordonnées des points sont : $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$. On place de plus le point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

Dans la suite de l'exercice, on admet qu'on peut utiliser la formule de la distance comme en 2de : si $M(x_M;y_M;z_M)$ et $N(x_N;y_N;z_N)$ alors $MN = \sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2+(z_N-z_M)^2}$.

On considère les points I$\left(1\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right)$, J$\left(0\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ 1\right)$, K$\left(\dfrac{3}{4}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ et L$(a\ ;\ 1\ ;\ 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$. Cela veut dire que I $\in$ (BC) avec BI $= \dfrac{1}{3}$ BC ; J $\in$ (EH) avec EJ $= \dfrac{2}{3}$ EH ; K $\in$ (EF) avec EK $= \dfrac{1}{3}$ EF et L $\in$ (DC) avec DL $= a$ DC



1. Recopier la figure sur une demi-page (prévoir de la place au-dessus, en-dessous, sur les côtés), et placer les points I, J et K.
2. Démontrer que les droites (IL) et (JK) sont parallèles si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \dfrac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

3. Rajouter le point L sur la figure et démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
4. Construire l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH. On laissera apparents les traits de construction, et on désignera par :
   - M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF)
   - N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH)
   - O le point d'intersection des droites (JK) et (IM)
   - P le point d'intersection des droites (JK) et (LN)
5. Déterminer la longueur FO.
   Indication : on pourra s'aider du point Q, intersection de (FG) et de la parallèle à (GH) en J.

   En déduire la longueur BM.
6. Calculer de même DN.
7. (Bonus) En déduire les coordonnées de M et N.
8. Calculer l'aire de l'hexagone ILNJKM.