Exercice 1 - Polynésie, Juin 2013 9 points

1. (a) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ donc pour étudier son intersection avec (Oy) il suffit de calculer $f(0) = (0+2)\mathrm{e}^{-0} = 2$. Donc le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec (Oy) est le point $\boxed{(0;2)}$.
Pour déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec (Ox), il suffit de résoudre $f(x) = 0$. Puisque l'exponentielle ne s'annule jamais, c'est donc équivalent à $x = -2$. Ainsi le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec (Ox) est le point $\boxed{(-2;0)}$.

   (b) En $-\infty$:
$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to-\infty} -x & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X & = & +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par composition, } \left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} & = & +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+2 & = & -\infty \end{array}\right\} \text{par produit, } \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}.$$
En $+\infty$, c'est une forme indéterminée « $+\infty \times 0$ », que l'on lève en indiquant que l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

   On en déduit qu'il y a une asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ d'équation $\boxed{y = 0}$.

   (c) Afin d'étudier les variations de f, étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:
$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & x+2 \\ v(x) & = & \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$$
Ainsi, pour tout réel x :
$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-\mathrm{e}^{-x})$
$= (-1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Sgn. $-x-1$		$+$	0	$-$	
Sgn. e^{-x}			$+$		
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Var. f	$-\infty$	↗	e	↘	0

2. (a) Voici un tableau de suivi des valeurs pas à pas :

Instruction	S	k
Initialisation	0	-
Pour k variant de 0 à 3	0	0
	$k \leq 3$ donc on rentre dans la boucle	
Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$	0,5	0
Pour k variant de 0 à 3	0,5	1
	$k \leq 3$ donc on rentre dans la boucle	
Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$	$0,5 + 0,5625\mathrm{e}^{-0,25}$	1
Pour k variant de 0 à 3	$0,5 + 0,5625\mathrm{e}^{-0,25}$	2
	$k \leq 3$ donc on rentre dans la boucle	
Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$	$0,5 + 0,5625\mathrm{e}^{-0,25} + 0,625\mathrm{e}^{-0,5}$	2
Pour k variant de 0 à 3	$0,5 + 0,5625\mathrm{e}^{-0,25} + 0,625\mathrm{e}^{-0,5}$	3
	$k \leq 3$ donc on rentre dans la boucle	
Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$	$0,5 + 0,5625\mathrm{e}^{-0,25} + 0,625\mathrm{e}^{-0,5} + 0,6875\mathrm{e}^{-0,75}$	3
Pour k variant de 0 à 3	$0,5 + 0,5625\mathrm{e}^{-0,25} + 0,625\mathrm{e}^{-0,5} + 0,6875\mathrm{e}^{-0,75}$	4
	$k > 3$ donc on sort de la boucle	

Ainsi cet algorithme affiche $0,5 + 0,5625\mathrm{e}^{-0,25} + 0,625\mathrm{e}^{-0,5} + 0,6875\mathrm{e}^{-0,75} \approx \boxed{1{,}642}$ à 10^{-3} près.

(b) L'algorithme demandé est celui de la méthode des rectangles que l'on a vue pendant la séance avec monsieur l'inspecteur ! Il suffit de modifier l'algorithme en rajoutant une variable N, puis en changeant les 4 par des N (et le 3 par $N-1$) :

Variables :	k et N sont deux nombres entiers
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
	Lire la valeur de N
Traitement :	Pour k variant de 0 à $N-1$
	│ Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3. (a) Pour démontrer que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on peut simplement démontrer que $g' = f$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & -x-3 \\ v(x) & = & \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & -1 \\ v'(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout réel $x, g'(x) = -1\times\mathrm{e}^{-x} + (-x-3)\times(-\mathrm{e}^{-x}) = (2+x)\mathrm{e}^{-x} = f(x).\square$

(b) On peut maintenant calculer l'aire $\mathcal{A}$ de manière exacte. Puisque la fonction f est positive sur $[0;1]$:
$A(\mathcal{A}) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [g(x)]_0^1 = g(1)-g(0) = -4\mathrm{e}^{-1}-(-3) = \boxed{3-4\mathrm{e}^{-1}}$.

(c) On calcule $1,642-(3-4\mathrm{e}^{-1}) \approx \boxed{0,114}$ à 10^{-3} près.

Exercice 2 - Adapté de Amérique du nord, Mai 2013 5 points

1. (a) Il s'agit bien sûr de la limite en 0^+ vu l'ensemble de définition de f :

$$\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x\to0^+} 1 & = & 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln(x) & = & -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par somme, } \left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x\to0^+} 1+\ln(x) & = & -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to0^+} x^2 & = & 0^+ \end{array}\right\} \text{par quotient, } \boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty}.$$

(b) $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0}$ (c'est une limite du programme à apprendre par coeur, on peut aussi la retrouver en disant que le logarithme est négligeable devant les puissances de x)
$f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(x)}{x}\times\dfrac{1}{x}$. Il vient comme à la question précédente par produit et somme que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

(c) On trouve donc deux asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$: une verticale d'équation $\boxed{x=0}$ (car f a une limite infinie en 0) et une horizontale d'équation $\boxed{y=0}$ (car f a une limite finie 0 en $+\infty$).

2. (a) Calculons la dérivée de f :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & 1+\ln(x) \\ v(x) & = & x^2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v'(x) & = & 2x \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout réel $x, f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln(x))\times 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{x-2x-2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{-x-2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x(1-2\ln(x))}{x^4} = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}.\square$

(b)
$$\begin{array}{ll} -1-2\ln(x) > 0 & \\ & +2\ln(x) \\ -1 > 2\ln(x) & \\ & \div 2 \\ -\dfrac{1}{2} > \ln(x) & \\ & \text{On compose par } exp \text{ qui est croissante} \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} > x & \end{array}$$

Ainsi $\mathcal{S} =]0; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}[$ (effectivement, il faut que $x > 0$ pour que son logarithme soit défini !)
On déduit le tableau suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

(c) On déduit alors le tableau des variations suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
Var f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

3. (a) On peut raisonner à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires : une fois sur $]0; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}]$ (pour démontrer qu'il y a un unique antécédent à 0 sur cet intervalle), et une fois sur $]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ (pour démontrer qu'il n'y a pas d'antécédent à 0 sur cet intervalle).

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est strictement croissante sur }]0; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}] \\ f \text{ est continue sur }]0; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}] \\ f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty \\ f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) = \dfrac{e}{2} \\ 0 \in]-\infty; \dfrac{e}{2}] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas strictement monotone, $\exists ! x \in]0; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}]$ tel que $f(x) = 0$.

On peut aussi directement résoudre $f(x) = 0 \iff 1 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$.
Ainsi l'unique point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\boxed{(e^{-1}; 0)}$.

(b) On déduit le tableau suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
Sgn. $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 3 - Difficulté normale - Adapté de Polynésie, Septembre 2010 4,5 points

1. Par exemple $\boxed{(AB) \text{ et } (CG) \text{ sont non coplanaires}}$.
2. L'intersection des plans (BEG) et (ABC) est $\boxed{\text{une droite}}$, puisque les plans ne sont ni strictement parallèles (ils ont B en commun) ni confondus ($E \in (BEG)$ mais $E \notin (ABC)$).

   Pour construire graphiquement cette intersection, il suffit de $\boxed{\text{mener la parallèle à (EG) passant par B}}$: effectivement, le plan (BEG) coupe les plans (ABC) et (EFG) en deux droites parallèles, puisque ces plans sont parallèles. Or $(BEG) \cap (EFG) = (EG)$, donc $(BEG) \cap (ABC)$ est une droite parallèle à (EG), passant par B puisque $B \in (BEG) \cap (ABC)$.
3. On mène la parallèle à (BF), donc les coordonnées x et y de L sont les mêmes que celles de K ; et on arrive sur la face du bas, donc $z_L = 0$. Ainsi $L\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; 0\right)$.

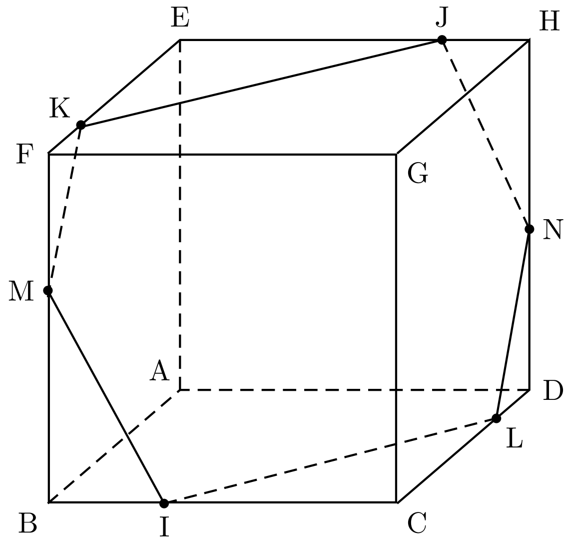
   On peut donc calculer $BL = \sqrt{(\frac{2}{3} - 1)^2 + (\frac{1}{3} - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{9}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$.
4. Les segments [BE], [EG] et [BG] sont trois diagonales de trois faces, donc sont de même longueur, $\sqrt{2}$. Donc $\boxed{\text{BEG est un triangle équilatéral}}$.
   EBG étant équilatéral il est isocèle, donc sa hauteur est confondue avec sa médiatrice. On trouve comme d'habitude que sa hauteur vaut côté $\times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Ainsi $\mathcal{A}(BEG) = \dfrac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.
5. On a déjà $BD = \sqrt{2}$ donc $BD^2 = 2$, on applique deux fois la formule de la distance :
   $BK^2 = (\frac{2}{3} - 1)^2 + (\frac{1}{3} - 0)^2 + (\frac{2}{3} - 0)^2 = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

$DK^2 = (\frac{2}{3} - 0)^2 + (\frac{1}{3} - 1)^2 + (\frac{2}{3} - 0)^2 = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$.
On retrouve bien que $BD^2 = BK^2 + DK^2$ donc par la réciproque du théorème de Pythagore, BDK est un triangle rectangle en K.□

6. Pour le tétraèdre BEGD, on peut donc prendre comme base le triangle BEG, et comme hauteur le segment [KD] puisqu'on vient de démontrer que $(KD) \perp (BD)$ donc c'est bien une hauteur. Ainsi $\mathcal{V}(BEGD) = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}(BEG) \times KD = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

Exercice 3.2 - Difficulté améliorée - Adapté de Centres étrangers, Juin 2012 6 points

1. La figure entièrement complétée est la suivante :



2. Soit P le point tel que EKPJ soit un rectangle. $(IL) /\!\!/ (JK)$ si, et seulement si, $\widehat{CIL} = \widehat{PKJ}$. Effectivement les droites (CD) et (EF) sont parallèles, (EH) et (BC) également (si on ne veut pas construire le point P, il faut écrire $\widehat{CIL} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{JKE}$).

On peut alors calculer les angles à l'aide de la trigonométrie du triangle rectangle :
$tan(\widehat{CIL}) = \dfrac{CL}{CI} = \dfrac{1-a}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}(1-a)$ et $tan(\widehat{PKJ}) = \dfrac{PJ}{PK} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{9}{8}$.
On retrouve bien la même tangente donc le même angle si et seulement si :
$\dfrac{3}{2}(1-a) = \dfrac{9}{8} \iff 1 - a = \dfrac{3}{4} \iff a = \dfrac{1}{4}$.□

3. Cf. figure.
D'après la question 2, IKJL est un trapèze. Il ne reste plus qu'à démontrer que JK = IL.
$JK = \sqrt{(\dfrac{3}{4} - 0)^2 + (0 - \dfrac{2}{3})^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{16} + \dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{145}{144}}$.
$IL = \sqrt{(\dfrac{1}{4} - 1)^2 + (1 - \dfrac{1}{3})^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{16} + \dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{145}{144}}$.□

4. Le dessin est complété sur la figure. C'est exactement comme dans l'exercice 31 p.279 par ex. : on fait se rencontrer (JK) et (GH) pour avoir le point d'intersection R entre (IJK) et (GH). Puis on joint (RL), et l'intersection avec (HD) crée le point N. De même pour le point M.

5. Le reste de la correction en classe.