On accordera une attention particulière, à ce devoir comme à tous les autres, à l'orthographe, la présentation et la rédaction des réponses.

Exercice 1 - Adapté de Liban, Mai 2012 9 points

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. **Un triangle**
   (a) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
   (b) En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
2. **Une transformation du plan**
   On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial $z_O = 0$, et telle que :
   $$z_{n+1} = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$
   Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   (a) Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :
   $$3 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 2\mathrm{i}\sqrt{3}$$
   On remarquera que : $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$.
   (b) Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.
   (c) Établir que pour tout entier naturel n, on a :
   $$z_{n+1} - \omega = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega),$$
   où ω désigne le nombre complexe défini à la question **1. b)**.
   (d) On admet que pour tout entier naturel n :
   $$\left(\overrightarrow{\Omega A_n}\ ;\ \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ et } \Omega A_n = \Omega A_{n+1}.$$
   Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012}.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

Exercice 2 8 points

Un réparateur de vélos a acheté 30% de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40% à un deuxième et le reste à un troisième. Le premier fournisseur produit 80% de pneus sans défaut, le deuxième 95% et le troisième 85%.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
   (a) Construire un arbre pondéré correspondant à la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
   (b) Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.
2. On note X la variable aléatoire continue qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) **Restitution organisée de connaissances**
   Soient t et h deux nombres réels positifs. Justifier que $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.
   En déduire, en fonction de λ, la probabilité que l'on puisse parcourir 700 kilomètres sans crevaison avec un pneu, sachant qu'on a déjà parcouru 300 kilomètres sans crevaison avec ce dernier.
   (b) Montrer que $P(500 \leq X \leq 1\ 000) = e^{-500\lambda} - e^{-1\ 000\lambda}$.
   (c) La probabilité que le pneu crève pour la première fois au bout d'un parcours de longueur comprise entre 500 et 1 000 kilomètres est égale à $\frac{1}{4}$. En déduire l'équation E_1 que doit vérifier λ.
   En effectuant le changement de variable $x = e^{-500\lambda}$, écrire l'équation E_2 que doit vérifier x.
   Résoudre E_2, puis en déduire la résolution de E_1.

Exercice 3 - Adapté d'Antilles-Guyane, juin 2012 3 points

Les deux questions sont indépendantes.

1. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément. Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ?
2. On considère l'algorithme :

```
A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
        A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
        Si A > 5, alors
                C prend la valeur de C + 1
        Fin Si
Fin répéter
Afficher C.
```

   Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.
   Quelle sont les valeurs possibles pour la variable X ? Calculer les probabilités que $X = 1$, que $X = 9$ et que $X \geq 1$.