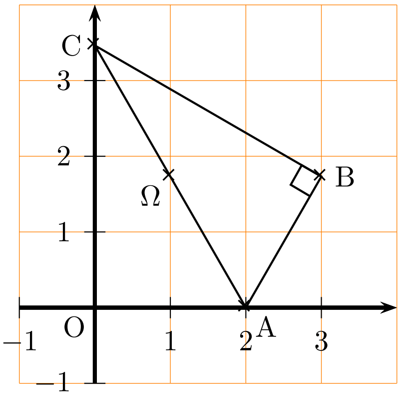
Exercice 1 - Adapté de Liban, Mai 2012 9 points

1. (a) Faisons un dessin pour avoir une idée du résultat. Pour obtenir $\sqrt{3}$ de manière exacte : on sait qu'on obtient $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ comme le sinus de $\dfrac{\pi}{3}$. On peut donc tracer le cercle de centre O et de rayon 1 pour le faire apparaître, puis reporter la longueur pour avoir $\sqrt{3}$ (et reporter une seconde fois pour avoir $2\sqrt{3}$). On peut sinon bien sûr placer $\sqrt{3} \approx 1,73$ de manière approximative.



Sur le dessin il est à peu près clair que $\widehat{ABC}(=\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)) = \boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$. Du coup pour le montrer il suffit de calculer les longueurs AB, AB et BC et d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

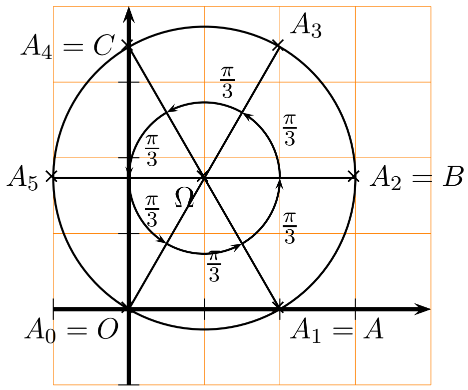
(b) Puisque ABC est rectangle en B, Ω est le milieu de l'hypoténuse [AC]. Ainsi $\omega = \dfrac{a+c}{2} = \dfrac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.$\square$

2. (a) Pour $n=0$, $z_1 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \times 0 + 2 = 2$ ainsi $A_1 = A$.
Pour $n=1$, $z_2 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \times 2 + 2 = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}+2 = 3+\mathrm{i}\sqrt{3}$ ainsi $A_2 = B$.
Pour $n=2$, $z_3 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \times (3+\mathrm{i}\sqrt{3}) + 2 = \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}+3\mathrm{i}\sqrt{3}-3}{2} + 2 = \frac{4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} + 2 = 2\mathrm{i}\sqrt{3}+2$.
Pour $n=3$, $z_4 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \times (2\mathrm{i}\sqrt{3}+2) + 2 = \frac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}+2\mathrm{i}\sqrt{3}-6}{2} + 2 = \frac{4\mathrm{i}\sqrt{3}-4}{2} + 2 = 2\mathrm{i}\sqrt{3}-2+2 = 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ ainsi $A_4 = C$.

(b) $A_1A_2 = |z_2 - z_1| = |1+\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.
$A_2A_3 = |z_3 - z_2| = |2\mathrm{i}\sqrt{3}+2-(3+\mathrm{i}\sqrt{3})| = |-1+\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.
$A_3A_4 = |z_4 - z_3| = |2\mathrm{i}\sqrt{3}-(2\mathrm{i}\sqrt{3}+2)| = |-2| = \sqrt{(-2)^2+\sqrt{0}^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$.
Ainsi les trois longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$ $\boxed{\text{sont égales}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} z_n + 2$.
Calculons $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n - (1+\mathrm{i}\sqrt{3})) = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} z_n + \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{3}+3}{2} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} z_n + \frac{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} z_n + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} z_n + 2 - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = z_{n+1} - \omega$.

(d) Le fait que $\Omega A_n = \Omega A_{n+1}$ nous dit que les points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous sur le cercle de centre Ω et de rayon ΩA_0 (par exemple) qui vaut donc $|\omega| = 2$.
Puisque $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}\ ;\ \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, cela veut dire que à chaque nouveau point construit, on ajoute un angle au centre dans ce cercle de $\dfrac{\pi}{3}$. Ainsi, au bout de 6 points construits on a ajouté un angle au centre de 2π donc on a fait un tour complet et on est revenu au point de départ, c'est-à-dire $A_{n+6} = A_n$.$\square$.
Parce qu'un dessin vaut mieux qu'un long discours, c'est le schéma suivant :

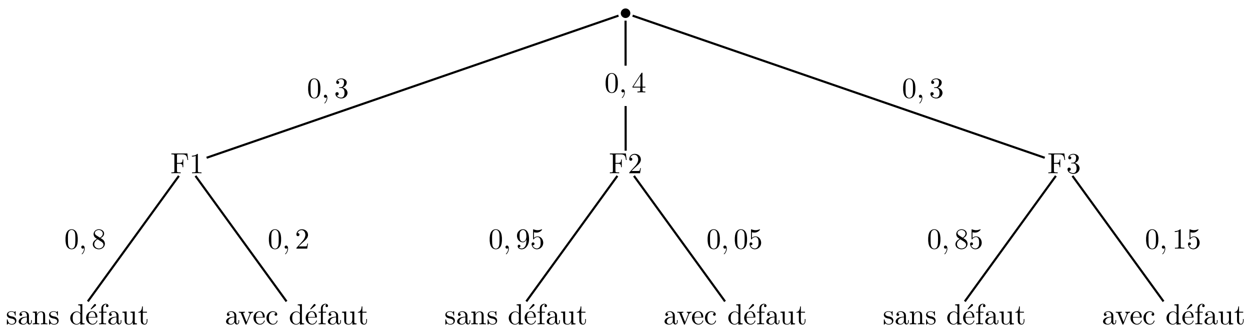


Or $2\ 012 = 6 \times 335 + 2$ ainsi $A_{2\ 012} = A_2$. Donc $z_{2\ 012} = b = 3 + i\sqrt{3}$.

3. Dans le schéma précédent, il vient naturellement que chaque triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est équilatéral. Effectivement ce sont des triangles isocèles en Ω avec un angle en Ω de $\dfrac{\pi}{3}$. On a déjà calculé que $\Omega A_n = 2$ ainsi $\boxed{A_n A_{n+1} = 2}$.

Exercice 2 — 8 points

1. (a) On peut construire l'arbre suivant, où Fi correspond à un pneu du i^ème fournisseur.



Ainsi P(sans défaut) $= 0,3 \times 0,8 + 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,85 = 0,875.\square$

(b) On cherche à calculer $\mathrm{P}_{\text{sans défaut}}(\mathrm{F2}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{F2} \cap \text{sans défaut})}{\mathrm{P}(\text{sans défaut})} = \dfrac{0,4 \times 0,95}{0,875} \approx \boxed{0,434}$

2. (a) Soient t et h deux nombres réels positifs.

Utilisons la formule des probabilités conditionnelles : $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \dfrac{P(X \geq t \cap X \geq t + h)}{P(X \geq t)}$.

Or $[t; +\infty[\cap [t + h; +\infty[= [t; +\infty[$ car $h \geq 0$, donc cette probabilité vaut $\dfrac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)}$.

Puisque X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, $P(X \geq t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-\lambda x}]_t^{+\infty} = 0 - (-\mathrm{e}^{-\lambda t}) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. De même $P(X \geq t + h) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}$.

Ainsi $\dfrac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda t - \lambda h} \times \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(X \geq h).\square$

On nous demande de calculer $P_{X \geq 300}(X \geq 700) = P(X \geq 400) = \boxed{\mathrm{e}^{-400\lambda}}$.

(b) De même, $P(500 \leq X \leq 1\ 000) = \displaystyle\int_{500}^{1\ 000} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-\lambda x}]_{500}^{1\ 000} = e^{-500\lambda} - e^{-1\ 000\lambda}.\square$

(c) L'équation que doit vérifier λ est donc (E_1) : $\boxed{e^{-500\lambda} - e^{-1\ 000\lambda} = \dfrac{1}{4}}$.

En effectuant le changement de variable $x = e^{-500\lambda}$, on a donc $e^{-1\ 000\lambda} = e^{-500\lambda \times 2} = \left(e^{-500\lambda}\right)^2 = x^2$.

Ainsi l'équation que doit vérifier x est donc (E_2) : $\boxed{x - x^2 = \dfrac{1}{4}}$.

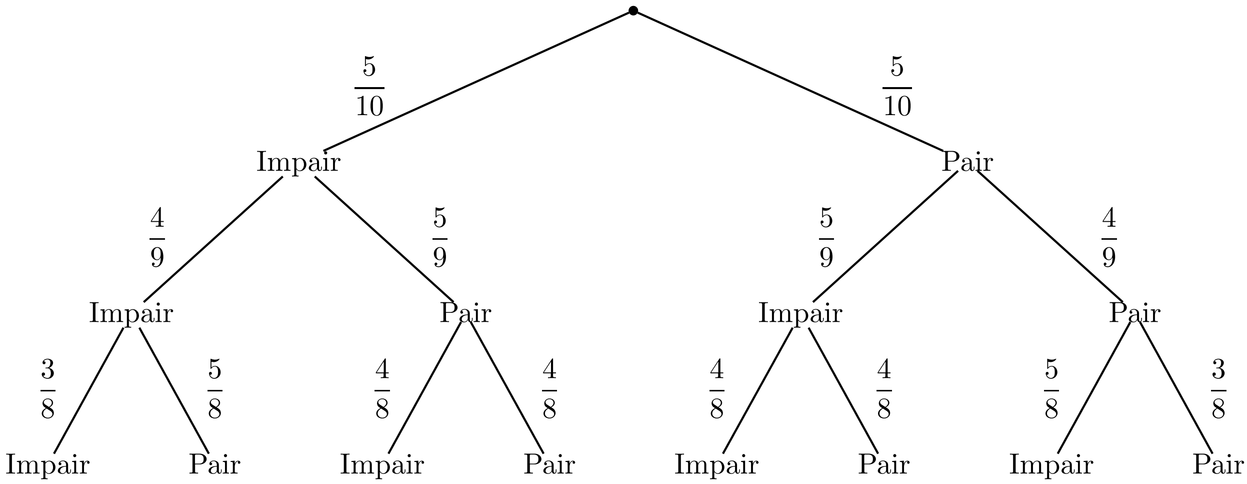
On réécrit donc (E_2) : $-x^2+x-\dfrac{1}{4}=0$. Donc le discriminant vaut $\Delta = 1^2-4\times(-1)\times\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 1-1=0$. Il y a donc une unique solution (double) : $x=\dfrac{-1}{-2}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

Or on a effectué le changement de variable $x=e^{-500\lambda}$ donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \mathrm{e}^{-500\lambda} && \text{On compose par ln}\\
\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= \ln\left(\mathrm{e}^{-500\lambda}\right) && \text{On simplifie}\\
-\ln(2) &= -500\lambda && \div 500\\
\boxed{\frac{\ln(2)}{500}} &= \lambda
\end{aligned}$$

Exercice 3 - Adapté d'Antilles-Guyane, juin 2012 3 points

1. Le plus simple est de remarquer que l'événement ≪ obtenir au moins un jeton à numéro pair ≫ est le contraire de l'événement ≪ obtenir trois jetons à numéro impair ≫. Dans tous les cas, on peut lire les probabilités sur l'arbre suivant :

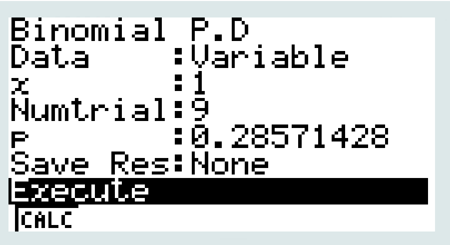


Donc la probabilité vaut $1-\dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{9}\times\dfrac{3}{8}=1-\dfrac{1}{12}=\boxed{\dfrac{11}{12}}$.

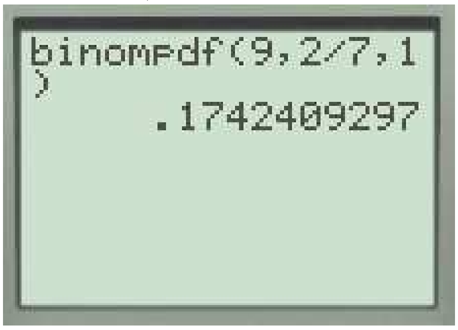
2. C démarre à 0, puis à chacune des 9 itérations, il peut soit rester constant soit être augmenté de 1. Ainsi l'ensemble des valeurs que X peut prendre est $\boxed{[|0;9|]}$.

Il est alors clair que X suit la loi binomiale de paramètres $n=9$ et $p=\dfrac{2}{7}$ (ce qu'on note $X\sim\mathcal{B}\left(9,\dfrac{2}{7}\right)$).
Effectivement on a la répétition à l'identique (9 fois), de manière indépendante (le choix à chaque itération d'une valeur aléatoire pour A ne dépend pas des autres choix aléatoires), d'une expérience qui est de Bernoulli (deux possibilités : on incrémente C, ce qui arrive avec probabilité $\dfrac{2}{7}$, ou on n'incrémente pas C).
On peut donc faire faire les calculs à la calculatrice. Je rappelle que :
pdf correspond à probability density function et *cdf* correspond à *cumulative distribution function*. Ainsi, pour calculer $p(X=bidule)$ il faut utiliser *pdf*, et pour calculer $p(X\leq bidule)$ il faut utiliser *cdf*.
En français dans le texte, pour ceux qui ont une texas en français, c'est fdp pour *fonction densité de probabilité* et $frep$ pour *fonction de répartition*, et c'est la même chose : pour calculer $p(X=bidule)$ il faut utiliser fdp, et pour calculer $p(X\leq bidule)$ il faut utiliser $frep$.
Les captures d'écran de la page suivante rappellent comment se servir de ces fonctionnalités.

sur Casio : menu Stats, choisir Dist, puis Binm, puis Bpd. Sélectionner "Variable" pour Data. x correspond à la valeur à laquelle on souhaite tester l'égalité, $Numtrial$ le nombre de répétitions et p la probabilité de réussite.



sur Texas, menu Distr, choisir binomfdp. On tape alors `binomfdp(9, 2/7, 1)` (en premier le nombre de répétitions, puis la probabilité de réussite, puis la valeur à laquelle on souhaite tester l'égalité)



Calculs à la main : je fais ici le choix arbitraire de laisser à chaque fois 3 chiffres significatifs, puisque rien n'était précisé dans l'énoncé.

Pour que $X = 1$, il faut que l'on choisisse 8 fois un nombre $A \leq 5$ et 1 fois une valeur $A > 5$. Puisqu'il y a 9 répétitions, il y a 9 manières différentes de placer l'essai où $A > 5$ (lors du premier tirage aléatoire, lors du deuxième... ou lors du neuvième). Sur l'arbre, la probabilité de chacun de ces expériences est de $\left(\frac{5}{7}\right)^8 \times \frac{2}{7}$. Ainsi $\boxed{p(X = 1) = 9 \times \frac{2}{7} \times \left(\frac{5}{7}\right)^8 \approx 0,174}$ (on retrouve bien sûr la valeur donnée par la méthode précédente).

Il n'y a qu'une seule expérience où $X = 9$: il faut que lors des 9 essais, $A > 5$. Cela arrive donc avec une probabilité de $\boxed{\left(\frac{2}{7}\right)^9 \approx 1,27 \times 10^{-5}}$.

On peut, comme à la question 1, calculer $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = \boxed{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^9 \approx 0,952}$