Restitution Organisée de Connaissances

Sens direct : Soit $\mathcal{P}$ un plan. Alors $\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls et $d \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{P} = \{M(x;y;z)|ax+by+cz+d=0\}$.

Démonstration : soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point du plan $\mathcal{P}$, et soit $\overrightarrow{n} = (a;b;c)$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire orthogonal à $\mathcal{P}$ et non nul donc a, b et c sont non tous nuls).

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. $M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff$ $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0 \iff ax+by+cz+(-ax_A-by_A-cz_A)=0$.

On a bien montré qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls et $d = -ax_A-by_A-cz_A$ tels que $\mathcal{P} = \{M(x;y;z)|ax+by+cz+d=0\}$.

Sens réciproque : Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls et $d \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble $\mathcal{P} = \{M(x;y;z)|ax+by+cz+d=0\}$ est un plan de l'espace.

Démonstration : Sans perte de généralité, on peut supposer que a est non nul (sinon c'est b ou c, et au lieu de diviser par a on diviserait par b ou c). Puisque $a \neq 0$, le point $A = \begin{pmatrix} \frac{-d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{P}$: effectivement $a \times \frac{-d}{a} + b\times 0 + c \times 0 + d = -d+d = 0$.

Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x+\frac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$ $a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz = ax+by+cz+d = 0$ par définition de $\mathcal{P}$.

Donc l'ensemble $\mathcal{P}$ est un plan : c'est le plan perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ passant par A.

Adapté d'Amérique du Sud, Novembre 2008

1. $\boxed{\text{F}(1\,;0\,;1),\ \text{G}(1\,;2\,;1),\ \text{H}(0\,;2\,;1)}$

2. (a) En prenant FGH comme base de GFIH, AE est alors la hauteur et donc $\text{V} = \frac{\mathcal{A}(\text{FGH}) \times \text{AE}}{3}$.
   FGH est un triangle rectangle en G, donc $\mathcal{A}(\text{FGH}) = \frac{\text{FG}\times\text{GH}}{2} = \frac{2\times 1}{2} = 1$.
   Comme AE = 1, $\text{V} = \frac{1\times 1}{3} = \frac{1}{3}$.□

   (b) On a $\text{I}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi $\overrightarrow{\text{FI}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{IH}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{\text{FI}} \cdot \overrightarrow{\text{IH}} = 0+1-1 = 0$. Ainsi (FI) et (IH) sont perpendiculaires en I donc FIH est rectangle en I.□

   (c) En prenant FIH comme base de GFIH, la hauteur est celle issue de G et donc $\text{V} = \frac{\mathcal{A}(\text{FIH}) \times h}{3}$. Le triangle FIH étant rectangle en I, son aire est égale à $\frac{\text{FI}\times\text{IH}}{2}$.
   $\text{FI} = \sqrt{(x_I-x_F)^2+(y_I-y_F)^2+(z_I-z_F)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$;
   $\text{IH} = \sqrt{(x_H-x_I)^2+(y_H-y_I)^2+(z_H-z_I)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$.
   Ainsi $\mathcal{A}(\text{FIH}) = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
   En reprenant l'écriture de V : $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times h \iff \boxed{h = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}}$

3. (a) $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{FI}} = -2+1+1 = 0$; $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{IH}} = 0+1-1 = 0$
   $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (FIH) donc est normal à ce plan.□

(b) Une équation du plan (FIH) est donc de la forme : $2x + 1y - 1z + d' = 0$.
Comme F $\in$ (FIH) ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus soit :
$0 + 1 - 0 + d' = 0 \iff d' = -1$.
Une équation du plan (FIH) est donc $\boxed{2x + y - z - 1 = 0}$.

4. (a) (AG) $\perp$ (FIH) $\iff$ $\overrightarrow{\text{AG}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Or $\overrightarrow{\text{AG}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ n'est manifestement pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$ ainsi $\boxed{\text{(AG) n'est pas perpendiculaire à (FIH)}}$.

(b) $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \text{(AG)} \iff \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = t \times \overrightarrow{\text{AG}}$.
Cela se traduit par la représentation paramétrique de (AG) : $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{array}\right.}$

(c) Il faut résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2t \\ z & = & t \\ 2x + y - z - 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

En remplaçant x, y et z par leurs expressions des lignes 1, 2 et 3 dans la ligne 4, on aboutit à $2t + 2t - t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \dfrac{1}{3}$
En remplaçant t par cette valeur dans les lignes 1, 2 et 3 on trouve que les coordonnées de K sont $\boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}}$.