Devoir Surveillé n°2 de spécialité Mardi 11 février 2014

Cours

Soit A une matrice de format $(e; f)$ et B une matrice de format $(g; h)$.
À quelle condition peut-on effectuer le produit $C = A \times B$?
Quel est alors le format de la matrice C ?

Exercice 1 - Adapté de BTS Informatique & Gestion, Nouvelle-Calédonie, décembre 2001

Partie A

On donne les matrices suivantes (α et β désignant des réels) :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \text{-}1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On admet que $\mathrm{BC} = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 1 & 1 \\ \dots & 1 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer les coefficients de la première colonne, en fonction de α et β.
2. Déterminer α et β tels que B C = A.
3. Calculer A^2. Que remarque-t-on vis-à-vis de la matrice C ?

Partie B

1. Dessiner un graphe G orienté, de sommets a, b, c, d, dont la matrice d'adjacence est A.
2. (a) Peut-on aller de d à a en suivant des arcs de ce graphe ?
   (b) Peut-on aller de d à b en suivant des arcs de ce graphe ?
   (c) Dresser la liste de tous les chemins de longueur 2 allant de a jusqu'à c.
3. On effectue une marche aléatoire sur le graphe G. À l'instant initial $t = 0$ on se trouve au sommet a, et à chaque seconde on se déplace en empruntant au hasard l'un des arcs partants du sommet sur lequel on se trouve.
   (a) Quelle est la probabilité, à $t = 1$ seconde, de se retrouver en a ? En b ? En c ? En d ?
   (b) Questions identiques à $t = 2$ secondes.
   (c) Donner la matrice de transition de cette marche aléatoire.

Exercice 2 - Adapté de BTS Informatique & Gestion, Polynésie 2006

Une entreprise assure la production de deux types de calculatrices C_1 et C_2 en quantités (hebdomadaires) respectives x et y.

Le coût des éléments installés et le nombre d'heures de travail sont donnés pour chaque calculatrice dans le tableau suivant :

	C_1	C_2
Coût des éléments (en €)	6	8
Nombre d'heures de travail	1	1,5

Un programme de production hebdomadaire se représente par la matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Cette production occasionne un coût c et un nombre t d'heures de travail. Ces deux éléments sont donnés dans la matrice $Y = \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}$.

Enfin on appelle A la matrice issue du tableau : $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}$.

Partie A

Justifier que l'égalité matricielle reliant $AX = Y$ traduit la production de l'entreprise.

Partie B

Durant une semaine, l'entreprise a produit 200 calculatrices C_1 et 800 calculatrices C_2.

1. Écrire matriciellement l'égalité qui correspond à cette production.
2. Déterminer, par calcul matriciel, le coût total et le nombre d'heures de travail pour la production de cette semaine.

Partie C

1. Calculer la matrice A^{-1}, inverse de la matrice A.
2. Durant une autre semaine, l'entreprise fait face à un coût total de 8 400 € et 1 450 heures de travail.
   (a) Écrire matriciellement l'égalité qui correspond à cette production.
   (b) Déterminer, par calcul matriciel, le nombre de calculatrices de chaque type fabriquées au cours de cette semaine.