Exercice 1 - Adapté de BTS Informatique & Gestion, Nouvelle-Calédonie, décembre 2001

Partie A

1. Le coefficient $(BC)_{i,j}$ est égal à la ligne i de B multipliée par la colonne j de C. On doit ici calculer la première colonne de BC, donc $(BC)_{1,1}$, $(BC)_{2,1}$, $(BC)_{3,1}$ et $(BC)_{4,1}$.

$$(BC)_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \times 2 + 0 \times 0 + 1 \times \alpha + (-1) \times \beta = \alpha - \beta$$

$$(BC)_{2,1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (-1) \times 2 + 1 \times 0 + 1 \times \alpha + 0 \times \beta = -2 + \alpha$$

$$(BC)_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times \alpha + 1 \times \beta = \beta$$

$$(BC)_{4,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 1 \times 2 + 0 \times 0 + (-1) \times \alpha + 0 \times \beta = 2 - \alpha$$

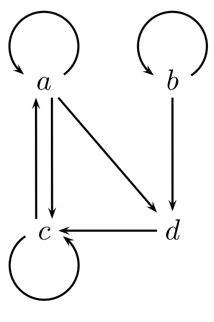
Ainsi la première colonne de BC vaut $\boxed{\begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ -2 + \alpha \\ \beta \\ 2 - \alpha \end{pmatrix}}$

2. Pour que BC soit égal à A, il faut que tous les coefficients soient égaux. On voit que c'est déjà bien le cas pour les 3 dernières colonnes, il faut donc maintenant trouver α et β vérifiant $\begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ -2 + \alpha \\ \beta \\ 2 - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha - \beta & = & 1 \\ -2 + \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 1 \\ 2 - \alpha & = & 0 \end{array} \right.$
La ligne 3 nous indique tout de suite que $\beta = 1$, et la ligne 4 que $\alpha = 2$. Il nous reste à vérifier que cela fonctionne bien dans les lignes 1 et 2 : $2 - 1$ est bien égal à 1 et $-2 + 2$ est bien égal à 0. Ainsi il faut choisir $\boxed{\beta = 1 \text{ et } \alpha = 2}$.

3. Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
On remarque donc que A^2 est la matrice C dans laquelle on a remplacé α par 2 et β par 1.

Partie B

1. Voici une représentation du graphe orienté de matrice adjacente A :



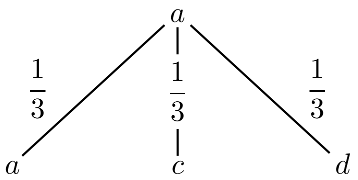
2. (a) $\boxed{\text{On peut aller de } d \text{ à } a}$ en suivant des arcs de ce graphe. Pas directement (car l'arc $d \to a$ n'existe pas), mais en passant par c par exemple : $d \to c \to a$.

   (b) $\boxed{\text{On ne peut pas aller de } d \text{ à } b}$, puisque le seul arc qui pointe vers b part de b (on ne peut donc pas aller vers b si on part de a ni si on part de c).

   (c) Pour aller de a jusqu'à c en suivant 2 arcs, on peut suivre les chemins :
   $\boxed{a \to a \to c\,;\ a \to d \to c \text{ ou } a \to c \to c.}$

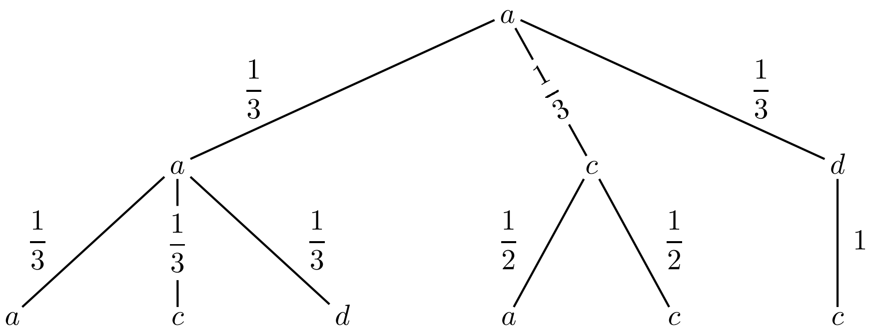
3. Par commodité, nous noterons $P_t(i)$ la probabilité de se retrouver au sommet i au bout de t secondes.

   (a) En partant de a et en 1 transition, voici l'arbre de probabilités :



   On déduit que $\boxed{P_1(a) = P_1(c) = P_1(d) = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{P_1(b) = 0}$.

   (b) En partant de a et en 2 transitions, voici l'arbre de probabilités :



   On déduit que que $P_2(a) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{18}}$.

   $\boxed{P_2(b) = 0}$

   $P_2(c) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 = \boxed{\frac{11}{18}}$

   $P_2(d) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}$.

   (c) Dans la matrice de transition, on donne les probabilités de passer d'un sommet à un autre en 1 seconde. Ainsi :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 - Adapté de BTS Informatique & Gestion, Polynésie 2006

Partie A

Fabriquer x calculatrices C_1 demande $6x$ € et x heures de travail. Fabriquer y calculatrices C_2 demande $8y$ € et $1,5y$ heures de travail. Ainsi $c = 6x + 8y$ et $t = x + 1,5y$. On vient donc d'écrire que $A \times X = Y$.

Partie B

1. Dans ce cas, on connaît $X = \begin{pmatrix}200\\800\end{pmatrix}$, et on peut donc écrire $\begin{pmatrix}6 & 8\\1 & 1,5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}200\\800\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\t\end{pmatrix}$.

2. On calcule alors :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix}200\\800\end{pmatrix} \\ AX = & \begin{pmatrix}6 & 8\\1 & 1,5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7\ 600\\1\ 400\end{pmatrix}\end{array}$$

Pour la production de cette semaine, il a fallu $\boxed{\text{1 400 heures de travail et cela a coûté 7 600 €}}$.

Partie C

1. On rappelle que si $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ et que $ad - bc \neq 0$, alors M est inversible et

$M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$.

Calculons le déterminant de A : $det(A) = 6 \times 1,5 - 1 \times 8 = 9 - 8 = 1 \neq 0$.

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1,5 & -8\\-1 & 6\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1,5 & -8\\-1 & 6\end{pmatrix}}$.

2. (a) Cela correspond à l'égalité matricielle $\begin{pmatrix}6 & 8\\1 & 1,5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\ 400\\1\ 450\end{pmatrix}$.

   (b) C'est une sorte de restitution organisée de connaissances de la résolution matricielle d'une équation puisque cela correspond à l'équation matricielle $AX = Y$ où X est l'inconnue :

$$\begin{array}{rcll} Y &=& AX & \\ A^{-1}Y &=& A^{-1}AX & \text{On multiplie à gauche par } A^{-1} \\ A^{-1}Y &=& I_2X & A^{-1}A = I_2 \\ A^{-1}Y &=& X & I_2 \text{ est neutre pour la multiplication} \end{array}$$

   On calcule alors :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix}8\ 400\\1\ 450\end{pmatrix} \\ A^{-1}Y = & \begin{pmatrix}1,5 & -8\\-1 & 6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\ 000\\300\end{pmatrix}\end{array}$$

   Cette semaine, l'entreprise a produit $\boxed{\text{1 000 calculatrices } C_1 \text{ et 300 calculatrices } C_2}$.

Cours

On peut effectuer le produit $C = A \times B$ si et seulement si $\boxed{f = g}$.

Le produit $C = A \times B$ sera alors de format $\boxed{(e;h)}$.