1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre VI (Applications de la continuité et de la dérivation) que la fonction exponentielle avait une réciproque. Effectivement, la fonction exponentielle est continue, strictement croissante de $]-\infty\ ;\ +\infty[$ dans $]0\ ;\ +\infty[$, ainsi on peut lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas strictement monotone :

$$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[, \exists! y \in]-\infty\ ;\ +\infty[\text{ tel que } e^y = x$$

On peut donc définir une fonction sur $]0\ ;\ +\infty[$, à valeurs dans $]-\infty\ ;\ +\infty[$, qui à tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ associe l'unique antécédent de x par la fonction exponentielle : c'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle, et on l'appelle la fonction logarithme népérien (du nom de Néper, son inventeur). On note ln cette fonction pour plus de commodité, et on admettra que ln est continue sur $]0\ ;\ +\infty[$ (on n'a au programme aucun théorème pour démontrer qu'une fonction est continue de toute façon).

Il découle de la définition deux propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, ln(e^x) = x$
- $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[, e^{ln(x)} = x$

Attention : cette seconde formule ne fonctionne que pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$ puisque la fonction ln n'est définie que sur $]0\ ;\ +\infty[$ (car un nombre négatif n'a pas d'antécédent par la fonction exp).

Remarque : on a vu dans le DM n°2 une fonction analogue, la fonction log. La fonction log est la réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$, c'est-à-dire que :
- $\forall x \in \mathbb{R}, log(10^x) = x$
- $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[, 10^{log(x)} = x$

Pour ces deux fonctions, on a $log(1) = \boxed{ln(1) = 0}$ (puisque $e^0 = 10^0 = 1$), par contre $\boxed{ln(e) = 1}$ alors que $log(10) = 1$.

Enfin on a également l'équivalence, $\boxed{\text{pour } a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R} : ln(a) = b \iff a = e^b}$, et $log(a) = b \iff a = 10^b$.

Remarque 2 : vous vous rappelez que dans ce devoir maison, on n'avait pas défini la fonction f comme étant la réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$, mais on l'avait définie comme étant une fonction qui transforme les produits en somme : la fonction log vérifie effectivement, tout comme la fonction ln, que $ln(x \times y) = ln(x) + ln(y)$. On reverra cette propriété plus tard. Il est bon de noter que cela fut la manière historique de définir les fonctions logarithmes : $\lambda o\gamma o\varsigma$: « rapport » et $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$: « nombre ». Il s'agissait à l'époque de faire des calculs facilement. Étant donné qu'une addition est bien moins coûteuse en temps qu'une multiplication, ils avaient trouvé le moyen de transformer le calcul d'une multiplication (il s'agissait de multiplier des chiffres astronomiques, au sens propre ainsi que figuré) en le calcul d'une addition. La méthode était très simple :

Exemple : si on voulait multiplier 110,5 par 190,1 (en supposant que le calcul $110,5 \times 190,1$ soit pénible à effectuer) : on utilise le fait que $log(110,5 \times 190,1) = log(110,5) + log(190,1)$:

1. on cherche dans la table $log(110,5)$. La table nous indique que c'est $2,04336$. Effectivement la partie entière de $log(110,5)$ est 2 puisque $10^2 = 100 \leq 110,5 < 1\ 000 = 10^3$, donc le 2 n'est pas écrit dans la table pour gagner de la place. Ensuite, 110 se trouve écrit, et les décimales sont les différentes colonnes.
2. on cherche dans la table $log(190,1)$. La table nous indique que c'est $2,27898$.
3. on effectue l'addition : $2,04336 + 2,27898 = 4,32234$.

4. on cherche ensuite $4,32234$ dans la table (non présent sur cette page) et on trouve $21\ 005,8$. Ainsi $110,5 \times 190,1 \approx 21\ 005,8$. Pas mal comme méthode, étant donné que la valeur exacte est $21\ 006,05$: un écart relatif de $\dfrac{|v_{theorique} - v_{pratique}|}{v_{theorique}} \approx 1 \times 10^{-5} = 0,001\%$!

(cette méthode est présentée simplement pour l'anecdote, et n'est pas à savoir refaire : on a bien sûr aujourd'hui des calculatrices)

	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29
1	4,4	4,3	4,2	4,1	4	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3	2,9
2	8,8	8,6	8,4	8,2	8	7,8	7,6	7,4	7,2	7,0	6,8	6,6	6,4	6,2	6	5,8
3	13,2	12,9	12,6	12,3	12	11,7	11,4	11,1	10,8	10,5	10,2	9,9	9,6	9,3	9	8,7
4	17,6	17,2	16,8	16,4	16	15,6	15,2	14,8	14,4	14,0	13,6	13,2	12,8	12,4	12	11,6
5	22,0	21,5	21,0	20,5	20	19,5	19,0	18,5	18,0	17,5	17,0	16,5	16,0	15,5	15	14,5
6	26,4	25,8	25,2	24,6	24	23,4	22,8	22,2	21,6	21,0	20,4	19,8	19,2	18,6	18	17,4
7	30,8	30,1	29,4	28,7	28	27,3	26,6	25,9	25,2	24,5	23,8	23,1	22,4	21,7	21	20,3
8	35,2	34,4	33,6	32,8	32	31,2	30,4	29,6	28,8	28,0	27,2	26,4	25,6	24,8	24	23,2
9	39,6	38,7	37,8	36,9	36	35,1	34,2	33,3	32,4	31,5	30,6	29,7	28,8	27,9	27	26,1

II

LOGARITHMES DES NOMBRES DE 1 A 10 000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
1	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
2	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
3	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
4	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
5	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
6	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
7	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	302
8	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
9	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
1	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
2	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
3	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
4	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
5	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
6	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
7	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151
8	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
9	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
1	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
2	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
3	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
4	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
5	691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
6	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
7	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
8	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
9	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
1	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
2	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
3	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
4	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001
5	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
6	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
7	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
8	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
9	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140	613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
1	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198
2	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
3	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
4	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
5	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
6	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
7	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
8	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
9	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

II. Logarithmes des nombres de 1 à 10 000.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
1	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
2	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
3	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
4	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005
5	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
6	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
7	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
8	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
9	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656
1	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
2	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
3	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
4	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
5	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
6	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
7	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
8	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
9	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
1	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
2	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
3	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030
4	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
5	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
6	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
7	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
8	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
9	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
1	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
2	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
3	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
4	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
5	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
6	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161
7	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
8	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
9	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
1	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
2	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
3	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
4	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
5	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
6	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
7	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
8	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
9	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	28	27	26	25	24	23	22	21
1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1
2	5,6	5,4	5,2	5,0	4,8	4,6	4,4	4,2
3	8,4	8,1	7,8	7,5	7,2	6,9	6,6	6,3
4	11,2	10,8	10,4	10,0	9,6	9,2	8,8	8,4
5	14,0	13,5	13,0	12,5	12,0	11,5	11,0	10,5
6	16,8	16,2	15,6	15,0	14,4	13,8	13,2	12,6
7	19,6	18,9	18,2	17,5	16,8	16,1	15,4	14,7
8	22,4	21,6	20,8	20,0	19,2	18,4	17,5	16,8
9	25,2	24,3	23,4	22,5	21,6	20,7	19,8	18,9

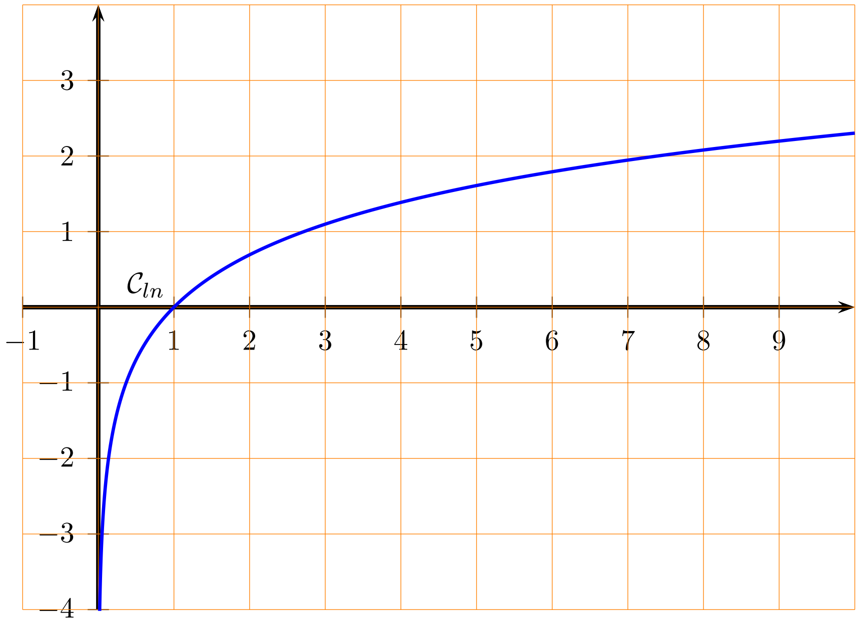
Nouvelles Tables de Logarithmes, Bouvart et Ratinet, Hachette

Cet ouvrage de 1957 était destiné entre autres à l'usage des candidats au Baccalauréat !

2 Etude de la fonction ln

2.1 Graphique, tableaux

En calculant quelques valeurs de la fonction ln, on déduit le graphique suivant :



On « voit » sur le graphique que :

Propriété : $\boxed{\text{La fonction } ln \text{ est strictement croissante sur }]0\ ;\ +\infty[}$.

Démonstration : soient $x < y$ deux nombres dans $]0\ ;\ +\infty[$. Alors $x = e^{ln(x)}$ et $y = e^{ln(y)}$ d'après l'introduction, donc $e^{ln(x)} < e^{ln(y)}$. Ainsi, puisque exp est strictement croissante, cela veut dire que $ln(x) < ln(y)$.□

Ainsi le tableau de signes de la fonction ln est lui aussi très facile :

x	0		1		$+\infty$
Sgn. $ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Pour terminer le tableau de variations de la fonction ln, il faut par contre obtenir les limites de ln en 0 et en $-\infty$. On peut « voir » sur le graphique que :

Limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty}$.

Démonstration : pour montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$, il suffit de montrer que « pour tout intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$, je peux trouver une valeur x_0 (qui dépend en général de A, bien sûr) telle que pour tous les nombres $x > x_0$, $ln(x)$ est dans cet intervalle » : c'est la définition de la limite !

Soit donc A un nombre réel. Chercher à résoudre $ln(x) > A$: c'est équivalent à $e^{ln(x)} > e^A$ c'est-à-dire $x > e^A$. Ainsi pour tout $x > e^A$, $ln(x) \in]A\ ;\ +\infty[$. On a bien démontré la propriété.

pour montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$, il suffit de montrer que « pour tout intervalle de la forme $]-\infty\ ;\ A[$, je peux trouver une valeur x_0 (qui dépend en général de A, bien sûr) telle que pour tous les nombres $0 < x < x_0$, $ln(x)$ est dans cet intervalle » : c'est la définition de la limite !

Soit donc A un nombre réel. Chercher à résoudre $ln(x) < A$: c'est équivalent à $e^{ln(x)} < e^A$ c'est-à-dire $x < e^A$ (et de plus $x > 0$ sinon le $ln(x)$ n'est pas défini). Ainsi pour tout $0 < x < e^A$, $ln(x) \in]-\infty\ ;\ A[$. On a bien démontré la propriété.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
Var. ln	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.2 Dérivée de ln

Propriété : La fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $\boxed{\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[, ln'(x) = \frac{1}{x}}$.

Démonstration : soit $x > 0$. Calculons le taux d'accroissement en x : vérifions qu'il a une limite, et que cette limite est $\frac{1}{x}$. Le taux d'accroissement vaut $\tau(x) = \frac{ln(x+h) - ln(x)}{x+h-x}$.

Effectuons le changement de variable $u = ln(x+h)$ et $v = ln(x)$ (donc $x + h = e^u$ et $x = e^v$). On obtient $\tau(x) = \frac{u-v}{e^u - e^v} = \frac{1}{\frac{e^u - e^v}{u-v}}$.

Or $\frac{e^u - e^v}{u-v}$, c'est le taux d'accroissement de exp en v. De plus lorsque $h \to 0$, $ln(x+h) \to ln(x)$ (par continuité de ln) ce qui veut exactement dire que $u \to v$. Ainsi, puisque exp est dérivable en v, cette quantité a une limite quand h tend vers 0, et c'est $exp'(v) = exp(v) = x$.

Donc, par quotient, $\tau(x)$ a une limite quand h tend vers 0, et cette limite est $\frac{1}{x}$.$\square$

Conséquence : ainsi $\boxed{ln \text{ est une primitive de la fonction inverse}}$!

3 Propriété fondamentale de ln

3.1 Transformation de produit en somme

On l'a dit en introduction, la propriété fondamentale des fonctions logarithmes est de transformer un produit en somme. Plus précisément :

Propriété : $\boxed{\forall (a, b) \in\ ]0\ ;\ +\infty[^2, ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)}$.

Démonstration : soient a, b deux nombres strictement positifs.
- $e^{ln(a)+ln(b)} = e^{ln(a)} \times e^{ln(b)} = a \times b$
- $e^{ln(a \times b)} = a \times b$.

Ainsi $ln(a \times b)$ et $ln(a) + ln(b)$ sont deux nombres qui ont même image par la fonction exp, et qui sont donc égaux.$\square$

3.2 Conséquences

Exactement comme dans le DM n°2 (s'y référer pour les démonstrations), on déduit que :
Propriétés : $\forall (x, y) \in\ ]0\ ;\ +\infty[^2, \forall x \in \mathbb{R}$,

- $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)$
- $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$
- $ln(a^x) = x \times ln(a)$

Comme conséquence - on rappelle encore une fois que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ - on a le résultat suivant :
$\forall x > 0, ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} ln(x)$.

4 Propriétés supplémentaires

4.1 Limites

Il faut également maitriser les limites suivantes, qui sont des formes indéterminées si on ne les apprend pas :

Limites :

- La fonction ln est négligeable devant les fonctions puissance (pour la même raison que la fonction exp est prépondérante devant les fonctions puissance)
- En conséquence, les deux limites suivantes sont importantes : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} x \times ln(x) = 0}$ (0^- si on veut raffiner)
- Enfin $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{ln(1+x)}{x} = 1}$

Démonstration : le premier point est admis.

Pour le second point, c'est une conséquence du premier point, mais que l'on peut démontrer à la main en effectuant le changement de variable $X = ln(x)$, puis en utilisant le résultat analogue pour la fonction exp, à savoir que $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} X \times e^X = 0$

Pour le troisième point enfin, il s'agit tout simplement de la définition du taux d'accroissement en 1. Effectivement $\frac{ln(1+x) - ln(1)}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction ln en 1, donc quand $x \to 0$, il a une limite qui est $ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.\square$

4.2 Dérivées & primitives supplémentaires

On a vu que la dérivée de la fonction ln est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ (donc la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction ln).

Il faut maintenant que l'on sache dériver également $ln(u(x))$. Attention par contre, pour que cette expression soit définie, il faut que u prenne des valeurs strictement positives puisque ln n'est définie que sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Propriété : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et u une fonction dérivable sur I, à valeurs strictement positives. Alors la fonction $x \mapsto ln(u(x))$ est dérivable sur I, et $\boxed{\forall x \in I, (ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$.

Démonstration : cela découle du fait que $(u(v(x)))' = v'(x) \times u'(v(x))$ (résultat « hors programme » vu au chapitre VI)

Il découle de la propriété précédente que :

Propriété : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et u une fonction dérivable sur I. Alors la fonction $x \mapsto ln(|u(x)|)$ est une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

5 Un peu plus sur la fonction log

De manière équivalente à ce que l'on a vu en introduction pour la fonction log, on peut définir log par son expression :

$\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[, log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$.

Il découle alors que log est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[, log'(x) = \frac{1}{xln(10)}$.