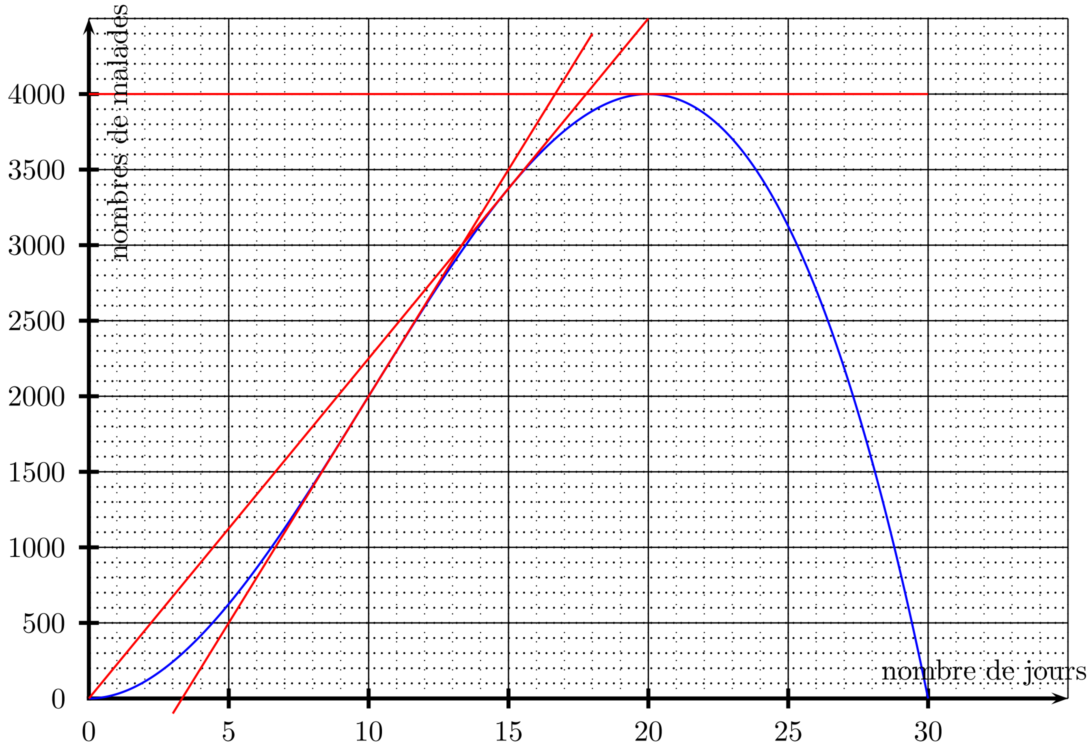
Exercice 1 : L'épidémie de Massilia



Partie A

1. Graphiquement, on lit qu'il y a $\boxed{\text{environ 600 malades}}$ le 5ᵉ jour.
2. Graphiquement, on lit qu'il y a 2000 malades $\boxed{\text{le 10}^{\text{e}}\text{ et le 28}^{\text{e}}\text{ jour}}$.
3. Le $\boxed{20^{\text{e}}\text{ jour}}$, le nombre de malades est maximal. Ce maximum est de $\boxed{4000 \text{ malades}}$.
4. 25 % de son maximum donne 1000 malades. Graphiquement, on voit qu'il y a moins de 1000 malades du début jusqu'au 7ᵉ jour, puis du 28ᵉ jour à la fin. L'ensemble des solutions est donc $\boxed{[0;7] \cup [28;30]}$.

Partie B

1. Pour calculer $f(5)$, il faut remplacer t par 5 dans l'expression de $f(t)$, ce qui donne :
   $f(5) = -(5)^3 + 30 \times 5^2 = -125 + 750 = \boxed{625}$.
2. (a) Cf. courbe.

   (b) On vient de tracer la tangente à C_f au point d'abscisse 15. Par définition, $f'(15)$ est le coefficient directeur de cette droite. On rappelle deux méthodes pour calculer le coefficient directeur :
   - Partir d'un point de la droite ; se décaler d'une unité en abscisse ; compter de combien d'unités en ordonnées se décaler pour revenir à la droite. Ici c'était plutôt compliqué à cause du graphique un peu surchargé, sauf si on avait la bonne idée de prendre un point de la droite très bas.
   - Prendre deux points A et B sur la droite. Le coefficient directeur de la droite est alors donné par la formule $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Prenons deux points sur la tangente : $A(15;3400)$ et $B(20;4500)$. Alors le coefficient directeur vaut $\frac{4500-3400}{21-15} = 220$. C'est bien sûr une valeur approchée puisque j'ai lu graphiquement les coordonnées des deux points sur la droite.
3. (a) $f'(t) = -3 \times t^2 + 30 \times 2t = \boxed{-3t^2 + 60t}$.

   (b) Pour montrer cette égalité, on peut partir de la forme factorisée pour la développer et retomber sur l'expression de f' trouvée à la (a).
   $3t(20-t) = 3t \times 20 - 3t \times t = -3t^2 + 60t = f'(t)$.

   (c) Pour trouver le tableau de variations de f, on peut commencer par le tableau de signes de f'. Comme $f'(t) = 3t(20-t)$, on peut trouver le signe de chaque facteur pour avoir le signe de f'.

   Le signe de $3t$:
   $3t > 0$ On divise par 3 de chaque côté
   $t > 0$

   Le signe de $(20-t)$:
   $20 - t > 0$ On ajoute t de chaque côté
   $20 > t$

t	$-\infty$		0		20		$+\infty$
Sgn. $3t$		$-$	0	$+$		$+$	
Sgn. $20-t$		$+$		$+$	0	$-$	
Sgn. $f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations de f sur $[0;30]$:

t	0		20		30
f(t)	0	$\nearrow$	4000	$\searrow$	0

4. (a) Le nombre dérivé de f en 20, c'est $f'(20)$. Je vais donc remplacer t par 20 dans l'expression de f'.
   $f'(20) = 3 \times 20(20-20) = 60 \times 0 = \boxed{0}$.
   Un nombre dérivé nul correspond à $\boxed{\text{une tangente parallèle à l'axe des abscisses}}$ (horizontale).
   (b) Cf. courbe.
5. (a) $f'(10) = 3 \times 10(20-10) = 30 \times 10 = \boxed{300}$.
   (b) Cf. courbe.

Exercice 2 : Questionnaire à choix multiple

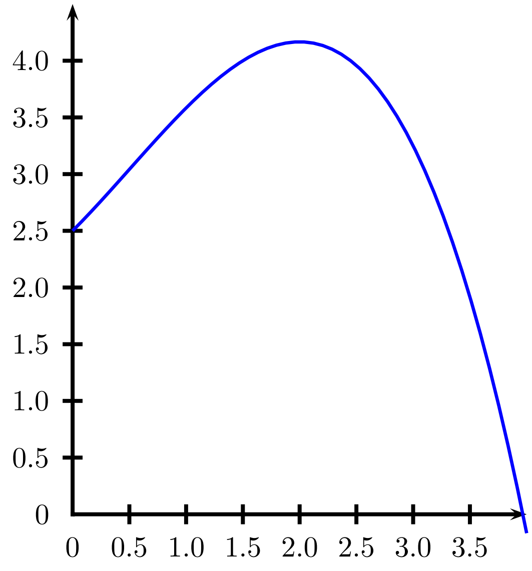
1. $\boxed{\text{Réponse b.}}$ $f(0) = -27$ (l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ à x=0)
2. $\boxed{\text{Réponse b.}}$ Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -3 et 3 (l'abscisse des points de $\mathcal{C}_f$ à y=0)
3. $\boxed{\text{Réponse c.}}$ Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -6$ est 3 (le nombre de points de $\mathcal{C}_f$ à y=-6)
4. $\boxed{\text{Réponse b.}}$ $f'(-1) = 0$ (la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x=-1 est horizontale, donc son coefficient directeur est 0)
5. $\boxed{\text{Réponse a.}}$ $f(x)$ est strictement positif sur $[-4\ ;\ -3[$ (les points de $\mathcal{C}_f$ à une abscisse supérieure à 0)
6. $\boxed{\text{Réponse c.}}$ La droite (BC) a pour équation $y = -4x - 12$ (la droite descend donc le coefficient directeur est négatif ; elle coupe l'axe des ordonnées en-dessous de 0 donc l'ordonnée à l'origine est négatif)
7. $\boxed{\text{Réponse a.}}$ Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont -1 et 3 (là où la tangente est horizontale)
8. $\boxed{\text{Réponse b.}}$ Les solutions de l'inéquation $f'(x) \geq 0$ sont $[-1\ ;\ 3]$ (la dérivée est positive quand la fonction est croissante donc quand $\mathcal{C}_f$ monte)

Exercice 3 : Etude de fonction

1. $f'(x) = -\frac{1}{6} \times 3x^2 + \frac{1}{4} \times 2x + 1 + 0$
   $f'(x) = -\frac{3}{6}x^2 + \frac{2}{4}x + 1$
   $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$
2. On va procéder comme à l'exercice numéro 1.
   $\frac{1}{2}(x+1)(2-x) = \frac{1}{2}(2x - x^2 + 2 - x) = \frac{1}{2}(2 + x - x^2) = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = f'(x)$.
3.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0	3,04	3,58	4	4,17	3,96	3,25	1,92	-0,17

4.



5. Il y a un minimum local en 0 (qui vaut $2,5$)
   Il y a un maximum local (qui est également global) en 2 qui vaut environ $4,17$
   Il y a un minimum local (qui est également global) en 4 qui vaut environ $-0,7$