Correction du baccalauréat ST2S Antilles-Guyanne de juin 2009

Exercice 1 : on note med_{date} le nombre de médicaments rejetés à la date donnée.

Partie A

1. Le taux d'évolution se calcule par $\frac{v_F - v_I}{v_I}$. Entre janvier et février, cela donne donc $\dfrac{med_{\text{fevrier}} - med_{\text{janvier}}}{med_{\text{janvier}}} = \dfrac{870-875}{875} \approx \boxed{-0,006 \text{ soit } -0,6\%}$
2. Deux méthodes pour calculer med_{mars} :
   Méthode du coefficient multiplicateur :
   On connait la quantité de médicaments rejetés en février (870) ainsi que le taux d'évolution entre février et mars (+1,2%). On en déduit donc :
   $med_{\text{mars}} = med_{\text{fevrier}} \times (1 + \text{taux}_{\text{fevrier/mars}}) = 870 \times (1 + 1,2\%) = 870 \times 1,012 \approx \boxed{880}$
   Méthode du produit en croix :
   Si on a oublié la formule, on peut repasser par le produit en croix :

870	$\Leftrightarrow$	100%
?	$\Leftrightarrow$	1,2%

   Ainsi l'augmentation est de $\dfrac{870 \times 1,2}{100} \approx 10$ médicaments. En mars on a donc 10 médicaments rejetés en plus qu'en février soit 880 en tout.
3. Cette fois-ci on ne peut pas utiliser le nombre de médicaments d'avril pour calculer le nombre de médicaments de mai. Effectivement on n'a pas le taux d'évolution avril/mai (on n'a pas non plus le nombre de médicaments d'avril mais on peut l'avoir grâce au taux mars/avril).
   Il va donc falloir utiliser le nombre de médicaments de juin ainsi que le taux mai/juin.
   $$\begin{aligned} med_{\text{juin}} &= med_{\text{mai}} \times (1 + \text{taux}_{\text{mai/juin}}) && \text{On remplace les valeurs connues} \\ 876 &= med_{\text{mai}} \times (1 + 1,9\%) && \text{On simplifie dans la parenthèse} \\ 876 &= med_{\text{mai}} \times 1,019 && \text{On divise par } 1,019 \text{ de chaque côté} \\ \tfrac{876}{1,019} &= med_{\text{mai}} && \text{On donne une valeur approchée à l'unité} \\ \boxed{860} &\approx med_{\text{mai}} \end{aligned}$$

Partie B

1. Pour calculer u_1 et u_2, il y a les mêmes méthodes qu'en A)2) :
   u_1 : Méthode du coefficient multiplicateur :
   On connait la quantité de médicaments rejetés en 1990 (18 100) ainsi que le taux d'évolution d'une année sur l'autre donc entre 1990 et 1991 (-3%). On en déduit donc :
   $u_1 = med_{1991} = med_{1990} \times (1 + \text{taux}_{1990/1991}) = 18\ 100 \times (1 + (-3\%)) = 18\ 100 \times 0,97 \approx \boxed{17\ 557}$
   u_1 : Méthode du produit en croix :
   Si on a oublié la formule, on peut repasser par le produit en croix :

18 100	$\Leftrightarrow$	100%
?	$\Leftrightarrow$	3%

   Ainsi la diminution est de $\dfrac{18\ 100 \times 3}{100} = 543$ médicaments. En 1991 on a donc 543 médicaments rejetés en moins qu'en 1990 soit 17 557 en tout.

   u_2 : Méthode du coefficient multiplicateur :
   On connait la quantité de médicaments rejetés en 1991 (17 557) ainsi que le taux d'évolution d'une année sur l'autre donc entre 1991 et 1992 (-3%). On en déduit donc de la même manière :
   $u_2 = med_{1992} = 17\ 557 \times 0,97 \approx \boxed{17\ 030}$
   u_2 : Méthode du produit en croix :
   Si on a oublié la formule, on peut repasser par le produit en croix :

17 557	$\Leftrightarrow$	100%
?	$\Leftrightarrow$	3%

   Ainsi la diminution est de $\dfrac{17\ 557 \times 3}{100} \approx 527$ médicaments. En 1992 on a donc 527 médicaments rejetés en moins qu'en 1991 soit 17 030 en tout.
2. Chaque année, le nombre de médicaments rejetés diminue de 3%. Ainsi dans la suite (u_n), pour aller d'un terme au suivant, il faut multiplier par $1 + \text{taux} = 1 - 3\% = 0,97$.
   On multiplie toujours par le même nombre, 0,97, pour aller d'un terme au suivant, donc :
   $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } 0,97 \text{ et de premier terme } u_0 = 18\ 100}$.
   La raison est de 0,97, et $0 < 0,97 < 1$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

3. (a) Dire que la suite u_n est géométrique de raison $0,97$, cela veut exactement dire que pour tout entier naturel n, on a la formule $\boxed{u_{n+1} = u_n \times 0,97}$

   (b) Puisque nous avons une suite géométrique, nous pouvons écrire que, pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times (raison)^n$. Dans le cas qui nous intéresse, cela donne ainsi $\boxed{u_n = 18\ 100 \times 0,97^n}$.

4. (a) Résolvons cette inéquation à l'aide du logarithme (soit tout de suite, soit diviser en premier).

   Méthode 1 :

$$\begin{aligned}
18\ 100 \times 0,97^x &\leq 9\ 000 && \text{On "passe au logarithme"}\\
log(18\ 100 \times 0,97^x) &\leq log(9\ 000) && log(a \times b) = log(a) + log(b)\\
log(18\ 100) + log(0,97^x) &\leq log(9\ 000) && log(a^x) = x \times log(a)\\
log(18\ 100) + x \times log(0,97) &\leq log(9\ 000) && -log(18\ 100)\\
x \times log(0,97) &\leq log(9\ 000) - log(18\ 100) && \div log(0,97)\\
x &\geq \frac{log(9\ 000) - log(18\ 100)}{log(0,97)}
\end{aligned}$$

   Attention, dans la division $log(0,97)$ est un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité !

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\left[\frac{log(9\ 000) - log(18\ 100)}{log(0,97)} ; +\infty\right[}$.

   Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
18\ 100 \times 0,97^x &\leq 9\ 000 && \div 18\ 100\\
0,97^x &\leq \frac{9\ 000}{18\ 100} && \text{On "passe au logarithme"}\\
log(0,97^x) &\leq log\left(\frac{90}{181}\right) && log(a^x) = x \times log(a)\\
x \times log(0,97) &\leq log\left(\frac{90}{181}\right) && \div log(0,97)\\
x &\geq \frac{log(\frac{90}{181})}{log(0,97)}
\end{aligned}$$

   Attention, dans la division $log(0,97)$ est un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité !

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\left[\frac{log(\frac{90}{181})}{log(0,97)} ; +\infty\right[}$.

   Remarque : $\frac{log(9\ 000) - log(18\ 100)}{log(0,97)}$ et $\frac{log(\frac{90}{181})}{log(0,97)}$ sont bien sûr les mêmes nombres, écrits différemment.

   Remarque : on pouvait aussi s'aider de la calculatrice, rentrer $Y1 = 18\ 100 \times 0,97 \wedge X$ et avec une table de valeurs, regarder à partir de quand les valeurs deviennent inférieures à 9 000.

   (b) Le premier entier plus grand que $\frac{log(9\ 000) - log(18\ 100)}{log(0,97)}$ est 23. Cela correspond à l'année $1990 + 23 = 2013$. Ainsi, $\boxed{\text{à partir de 2013 le nombre de médicaments rejetés par l'entreprise sera inférieur à 9 000.}}$

Exercice 2

Partie A - Étude de fonction

1. (a) Pour étudier le signe de $\frac{1190 - 1615t}{t^3}$, on va étudier le signe du numérateur et du dénominateur :

   Signe du numérateur, méthode 1 :

Place du (+) :

$$\begin{aligned}
1190 - 1615t &> 0 && -1190\\
-1615t &> -1190 && \div(-1615)\\
t &< \frac{1190}{1615}
\end{aligned}$$

Place du (−) :

$$\begin{aligned}
1190 - 1615t &< 0 && -1190\\
-1615t &< -1190 && \div(-1615)\\
t &> \frac{1190}{1615}
\end{aligned}$$

Place du (0) :

$$\begin{aligned}
1190 - 1615t &= 0 && -1190\\
-1615t &= -1190 && \div(-1615)\\
t &= \frac{1190}{1615}
\end{aligned}$$

Signe du numérateur, méthode 2 :

Le numérateur est l'expression d'une fonction affine. Son tableau de signes est donc très simple (sous la forme "+ 0 −" ou "− 0 +"). Il suffit alors de ne résoudre qu'une seule des inéquations pour déduire l'intégralité du tableau de signes.
On présente ici un autre cheminement pour résoudre l'inéquation, qui consiste à "mettre" les t à droite pour ne pas avoir à faire de division par un nombre négatif et donc à ne pas avoir à changer le sens de l'inégalité.

$$\begin{aligned} 1190 - 1615t &> 0 \\ 1190 &> 1615t \quad (+1615t) \\ \frac{1190}{1615} &> t \quad (\div 1615) \end{aligned}$$

Ainsi le tableau de signes du numérateur est le suivant sur $\mathbb{R}$:

t	$-\infty$		$\frac{1190}{1615}$		15
Sgn. $1190 - 1615t$		$+$	0	$-$	

On ne demande que sur $[1; 15]$, donc comme $\dfrac{1190}{1615} < 1$ le numérateur est toujours négatif sur cet intervalle. De plus, sur cet intervalle $t > 0$ donc par produit, $t^3 > 0$. On a donc le tableau de signes suivant pour f' :

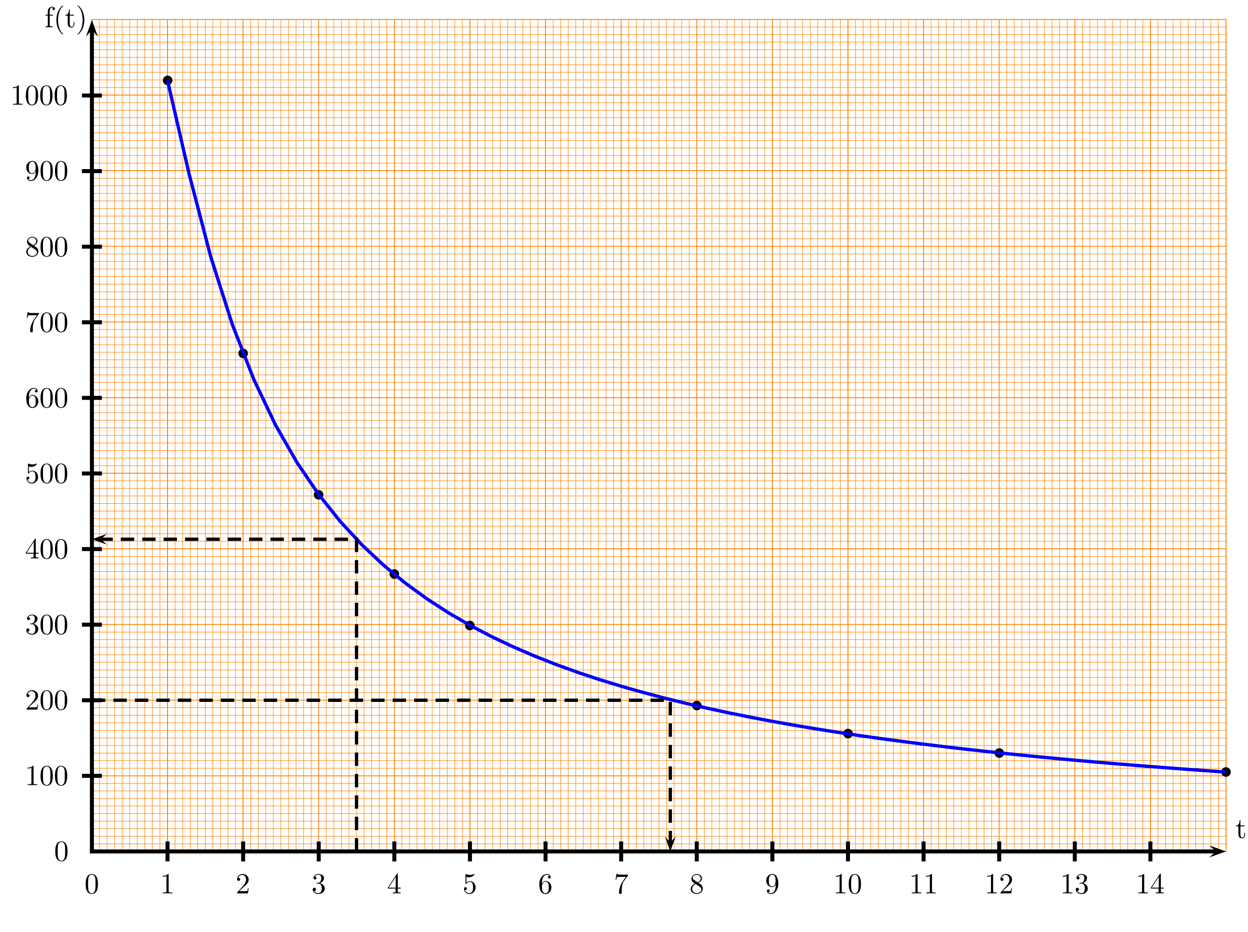
t	1	15
Sgn. $1190 - 1615t$	$-$	
Sgn. t^3	$+$	
Sgn. $f'(t)$	$-$	

(b) La fonction f est croissante là où sa dérivée est positive, décroissante là où sa dérivée est négative. A l'aide du tableau de signes de f', on en déduit donc le tableau de variations suivant (on a complété les valeurs avec la calculatrice en arrondissant comme on nous l'a demandé à l'unité)

t	1	15
Var. f	1 020 ↘	105

2. On demande à la calculatrice un tableau de valeurs avec un pas de 1, et on ne recopie que les valeurs qui nous intéressent :

t	1	2	3	4	5	8	10	12	15
$f(t)$	1020	659	472	367	299	193	156	130	105



Partie B - Application

1. (a) 3h30, cela correspond à $3,5$h. Nous devons donc regarder graphiquement $f(3,5)$. La lecture graphique (cf. pointillés) donne $f(3,5) \approx 410$. Ainsi la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 3h30 vaut $\boxed{\text{approximativement } 410 \text{ mg}}$.

   (b) Calculons $f(3,5)$. Pour cela on utilise l'expression de $f(t)$ donnée en début d'exercice. On a donc $f(3,5) = \dfrac{1\,615}{3,5} - \dfrac{595}{3,5^2} \approx 413$.

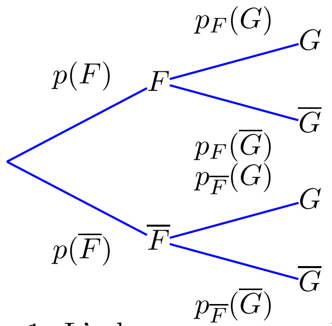
2. Cette fois-ci nous devons regarder à partir de quand les points de la courbe ont une ordonnée en-dessous de 200. On lit graphiquement environ $7,7$. Si l'on veut convertir en heures minutes :

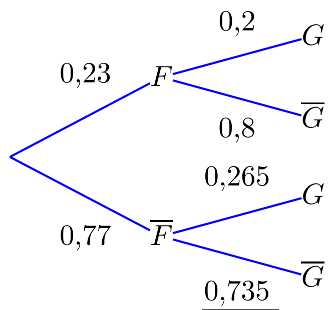
   1h $\Leftrightarrow$ 60min
   0,7h $\Leftrightarrow$?min

   ce qui donne donc $\dfrac{0,7 \times 60}{1} = 42$. Ainsi c'est $\boxed{\text{à partir d'environ 7h42}}$ que le médicament devient inefficace.

Exercice 3

Avant toute chose on pouvait penser à remplir l'arbre de probabilités au fur et à mesure de l'exercice, ce qui donnait l'arbre complété suivant. On peut aussi se rappeler ce que chacun des nombres signifie, comme c'est mentionné dans l'arbre de gauche.





1. L'arbre nous apprend que $p(F) = 0.23$ ainsi $p(\overline{F}) = 1 - p(F) = \boxed{0,77}$.
2. $F \cap G$: « l'enfant est allergique aux fruits secs et au gluten »
   Sur l'arbre, $F \cap G$ correspond à la branche tout en haut. Ainsi $p(F \cap G) = 0,23 \times 0,2 = \boxed{0,046}$ (ce qui correspond à la formule $p(F \cap G) = p(F) \times p_F(G)$)
3. (a) On nous demande $p(\overline{F} \cap G)$ en nous donnant $p(G)$. Puisqu'on a calculé $p(F \cap G)$ avec la question précedente, il suffit d'utiliser le fait que l'évènement G est constitué des évènements élémentaires $F \cap G$ et $\overline{F} \cap G$.
   On en déduit donc :
   $$\begin{array}{rcl} p(G) & = & p(F \cap G) + p(\overline{F} \cap G) \\ 0,25 & = & 0,046 + p(\overline{F} \cap G) \\ 0,204 & = & p(\overline{F} \cap G) \end{array}$$
   On remplace ce qu'on connaît
   $-0,046$
   Ainsi la probabilité que l'enfant ne soit pas allergique aux fruits secs mais au gluten est de $\boxed{0,204}$.

   (b) On nous demande $p_{\overline{F}}(G)$. On connaît $p(\overline{F})$ ainsi que $p(\overline{F} \cap G)$, il suffit donc d'utiliser la formule $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, appliquée ici à $A = G$ et $B = \overline{F}$. On trouve donc
   $p_{\overline{F}}(G) = \dfrac{p(\overline{F} \cap G)}{p(\overline{F})} = \dfrac{0,204}{0,77} \approx \boxed{0,265}$ (arrondi au millième)
   Ainsi la probabilité qu'il soit allergique au gluten sachant qu'il n'est pas allergique aux fruits secs est de $\boxed{0,265 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.
4. Afin de remplir le tableau il suffisait de multiplier les probabilités par 8000.

Nombre d'enfants	Allergiques au gluten	Non allergiques au gluten	Total
Allergiques aux fruits secs	368	1 472	1 840
Non allergiques aux fruits secs	1 632	4 528	6 160
Total	2 000	6 000	8 000