Correction du baccalauréat ST2S La Réunion de juin 2009

Exercice 1

Partie A

1. En B3 on va rentrer $\boxed{=B2/4}$.
2. (a) Du coup en B18 on a la formule $\boxed{=B17/4}$.

   (b) La valeur de cette cellule correspond au nombre de cellules dans la culture 16 heures après l'introduction de l'antibiotique. Effectivement la colonne A nous informe sur le nombre d'heures : à la ligne 2 il s'agit de l'heure 0, à la ligne 3 il s'agit de l'heure 1, etc. ce qui donne à la ligne 18 l'heure $18-2=16$.

Partie B

1. Puisque chaque heure le nombre de bactéries est divisé par 4, on a pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1}=\dfrac{u_n}{4}}$.
2. On n'est pas habitués à diviser pour aller d'un terme au suivant dans une suite. Or, on sait que diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse. Puisque l'inverse d'un nombre x, c'est le nombre $\dfrac{1}{x}$, on peut donc réécrire l'égalité précédente en :
   $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{4}=\dfrac{1}{4}\times u_n=0,25\times u_n$.
   On vient de montrer qu'on passe de n'importe quel terme de la suite au suivant en multipliant toujours par le même nombre, 0,25. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } 0,25}$.
3. On peut donc écrire $u_n=u_0\times raison^n=\boxed{10\ 000\ 000\ 000\times 0,25^n}$.
4. On souhaite que $10\ 000\ 000\ 000\times 0,25^n<100$. Résolvons cette inéquation à l'aide du logarithme :
   Méthode 1 :

$$\begin{array}{rcll}
10\ 000\ 000\ 000\times 0,25^n & < & 100 & \\
 & & & \text{On "passe au logarithme"} \\
log(10\ 000\ 000\ 000\times 0,25^n) & < & log(100) & \\
 & & & log(a\times b)=log(a)+log(b) \\
log(10\ 000\ 000\ 000)+log(0,25^n) & < & log(100) & \\
 & & & log(a^x)=x\times log(a) \\
log(10\ 000\ 000\ 000)+n\times log(0,25) & < & log(100) & \\
 & & & -log(10\ 000\ 000\ 000) \\
n\times log(0,25) & < & log(100)-log(10\ 000\ 000\ 000) & \\
 & & & \div log(0,25) \\
n & > & \dfrac{log(100)-log(10\ 000\ 000\ 000)}{log(0,25)} &
\end{array}$$

   Attention, dans la division $log(0,25)$ est un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité !
   Le premier entier plus grand que $\frac{log(100)-log(10\ 000\ 000\ 000)}{log(0,25)}$ est 14.
   Méthode 2 :

$$\begin{array}{rcll}
10\ 000\ 000\ 000\times 0,25^n & < & 100 & \\
 & & & \div 10\ 000\ 000\ 000 \\
0,25^n & < & \dfrac{100}{10\ 000\ 000\ 000} & \\
 & & & \text{On "passe au logarithme"} \\
log(0,25^n) & < & log\left(\dfrac{1}{100\ 000\ 000}\right) & \\
 & & & log(a^x)=x\times log(a) \\
n\times log(0,25) & < & log\left(\dfrac{1}{100\ 000\ 000}\right) & \\
 & & & \div log(0,97) \\
x & > & \dfrac{log(\frac{1}{100\ 000\ 000})}{log(0,25)} &
\end{array}$$

   Attention, dans la division $log(0,25)$ est un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité !
   Le premier entier plus grand que $\dfrac{log(\frac{1}{100\ 000\ 000})}{log(0,25)}$ est 14.
   Remarque : on pouvait aussi s'aider de la calculatrice, rentrer $Y1=10000000000\times 0,25\wedge X$ et avec une table de valeurs, regarder à partir de quand les valeurs deviennent inférieures à 100.
   Conclusion : $\boxed{\text{le nombre de bactéries devient inférieur à 100 au bout de 14 heures}}$.

Exercice 2

1. (a) Méthode 1 : commencer par remplir le tableau. On y lit 54 enfants asthmatiques et ayant eu une mère fumeuse, soit une probabilité de $\dfrac{54}{1\ 500} = 0,036$.

   Méthode 2 : on lit dans l'énoncé que :
   $4,8\%$ des enfants sont asthmatiques : $p(\text{asthmatique}) = 0,048$
   75% d'entre eux ont une mère ayant fumé pendant la grossesse : $p_{\text{asthmatique}}(\text{mère fumeuse}) = 0,75$.
   Donc $p(\text{asthmatique} \cap \text{mère fumeuse}) = p(\text{asthmatique}) \times p_{\text{asthmatique}}(\text{mère fumeuse}) = 0,036$.

   Conclusion : la probabilité que l'enfant soit asthmatique et ait une mère fumeuse est de $\boxed{0,036}$.

   (b) Méthode 1 : commencer par remplir le tableau. On y lit 240 mères fumeuses, ainsi que 54 enfants de ces mères qui sont asthmatiques, soit une probabilité de $\dfrac{54}{240} = 0,225$.

   Méthode 2 : on lit dans l'énoncé que 16% des mères ont fumé pendant la grossesse c'est à dire $p(\text{mère fumeuse}) = 0,16$ et on vient de calculer que $p(\text{asthmatique} \cap \text{mère fumeuse}) = 0,036$.

   On en déduit que $p_{\text{mère fumeuse}}(\text{asthmatique}) = \dfrac{p(\text{mère fumeuse} \cap \text{asthmatique})}{p(\text{mère fumeuse})} = \dfrac{0,036}{0,16} = 0,225$.

   Conclusion : la probabilité que l'enfant soit asthmatique sachant que sa mère a été fumeuse est de $\boxed{0,225}$.

2. Revenons aux données de l'énoncé :
   - 1 223 enfants n'ont aucun trouble : c'est déjà rempli.
   - 4,8% des enfants sont asthmatiques : cela correspond à $\dfrac{4,8}{100} \times 1\ 500 = 72$ enfants : c'est déjà rempli.

     75% d'entre eux ont une mère ayant fumé pendant la grossesse : cela correspond à $\dfrac{75}{100} \times 72 = 54$ enfants.
   - 16% des mères ont fumé pendant la grossesse : cela correspond à $\dfrac{16}{1\ 500} = 240$ mères : c'est déjà rempli.
   - 40% des enfants ayant des allergies asthmatiformes ont une mère n'ayant pas fumé pendant la grossesse : on n'a pas le nombre d'enfants asthmatiformes donc on ne peut pas tout de suite utiliser cette information. Il se trouve que l'on en a pas besoin puisqu'une case supplémentaire est remplie dans le tableau : la case avec 123 enfants.

   On complète le reste du tableau sans difficulté par additions et soustractions.

	Mère fumeuse pendant la grossesse	Mère non fumeuse pendant la grossesse	Total
Enfants asthmatiques	54	18	72
Enfants présentant un trouble asthmatiforme	123	82	205
Enfant ne présentant aucun trouble	63	1 160	1 223
Total	240	1 260	1 500

3. (a) 205 enfants présentent des troubles asthmatiformes. Donc $p(T) = \dfrac{250}{1\ 500} \approx \boxed{0,137 \text{ (arrondi au millième)}}$.

   L'énoncé nous dit que 16% des mères ont fumé pendant la grossesse soit $p(F) = \dfrac{16}{100} = \boxed{0,16}$. On pouvait aussi lire dans le tableau 240 mères fumeuses soit une probabilité de $\dfrac{240}{1\ 500}$.

   (b) $\text{T} \cap \text{F}$: « la fiche indique que l'enfant présente des troubles asthmatiformes et que la mère a fumé pendant la grossesse »

   On lit dans le tableau que 123 fiches correspondent, donc $p(\text{T} \cap \text{F}) = \dfrac{123}{1\ 500} = \boxed{0,082}$.

4. Parmi les 240 fiches indiquant que la mère a fumé pendant la grossesse, 63 indiquent également que l'enfant n'a aucun trouble, soit une probabilité de $\dfrac{63}{240} \approx 0,263$.

   Ainsi la probabilité que l'enfant n'ait aucun trouble sachant que la mère a fumé pendant la grossesse est de $\boxed{0,263 \text{ (au millième près)}}$.

Exercice 3

1. La fonction est positive là où sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, négative sinon.

x	6		7		9
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	

2. (a) Nous voulons dériver $f(x) = 0,37x^3 - 9,35x^2 + 76,51x - 200,95$.

$f(x) = 0,37 \times x^3 - 9,35 \times x^2 + 76,51 \times x - 200,95.$

$f'(x) = 0,37 \times 3x^2 - 9,35 \times 2x + 76,51 \times 1 + 0.$

$\boxed{f'(x) = 1,11x^2 - 18,7x + 76,51}$.

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dériver : dans chaque terme garder la constante et dériver la fonction de référence.

3 : Simplifier.

Nous allons développer l'expression de l'énoncé pour retrouver l'expression de f' calculée :

$$\begin{aligned} & (x-7)(1,11x - 10,93) \\ = \; & x \times 1,11x - x \times 10,93 - 7 \times 1,11x + 7 \times 10,93 \\ = \; & 1,11x^2 - 10,93x - 7,77x + 76,51 \\ = \; & 1,11x^2 - 18,7x + 76,51 \\ = \; & f'(x) \end{aligned}$$

Nous venons bien de démontrer que $\boxed{f'(x) = (x-7)(1,11x - 10,93)}$.

(b) Nous allons utiliser la forme factorisée de f' pour retrouver son tableau de signes. Comme il s'agit d'étudier le signe d'un produit (de 2 facteurs), nous allons utiliser un tableau de signes.

<u>Signe des facteurs, méthode 1 :</u>

Place du $+$:

$$\begin{aligned} x - 7 &> 0 \\ x &> 7 \end{aligned} \quad +7$$

Place du $-$:

$$\begin{aligned} x - 7 &< 0 \\ x &< 7 \end{aligned} \quad +7$$

Place du 0 :

$$\begin{aligned} x - 7 &= 0 \\ x &= 7 \end{aligned} \quad +7$$

Place du $+$:

$$\begin{aligned} 1,11x - 10,93 &> 0 \\ 1,11x &> 10,93 \quad +10,93 \\ x &> \tfrac{10,93}{1,11} \quad \div 1,11 \end{aligned}$$

Place du $-$:

De la même manière :

$$\begin{aligned} 1,11x - 10,93 &< 0 \\ x &< \tfrac{10,93}{1,11} \end{aligned}$$

Place du 0 :

De la même manière :

$$\begin{aligned} 1,11x - 10,93 &= 0 \\ x &= \tfrac{10,93}{1,11} \end{aligned}$$

<u>Signe des facteurs, méthode 2 :</u>

Les facteurs sont des expressions de fonctions affines. Leurs tableaux de signes sont donc très simples (sous la forme "$+ \;\; 0 \;\; -$" ou "$- \;\; 0 \;\; +$"). Il suffit alors de ne résoudre qu'une seule inéquation pour déduire l'intégralité d'un tableau de signes.

$$\begin{aligned} x - 7 &> 0 \\ x &> 7 \end{aligned} \quad +7$$

$$\begin{aligned} 1,11x - 10,93 &> 0 \\ 1,11x &> 10,93 \quad +10,93 \\ x &> \tfrac{10,93}{1,11} \quad \div 1,11 \end{aligned}$$

<u>Tableau :</u>

Nous devons étudier le signe sur $[6;9]$, dans la ligne des x on va donc aller de 6 à 9 (on ne va donc pas placer $\frac{10,93}{1,11} \approx 9,85$ qu'on a trouvé en étudiant le signe du second facteur)

x	6		7		9
Sgn. $(x-7)$		$-$	0	$+$	
Sgn. $(1,11x - 10,93)$		$-$		$-$	
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	

3. La fonction f est croissante là où sa dérivée est positive, décroissante là où sa dérivée est négative. A l'aide du tableau de signes de f', on en déduit donc le tableau de variations suivant (on a complété les valeurs avec la calculatrice)

x	6	7	9
Var f	$1,43$ ↗	$3,38$	↘ $0,02$

4. La fonction f mesure l'efficacité de la trypsine. Cette fonction est maximale lorsque x vaut 7, ainsi la réaction protéinique est la plus efficace possible lorsque le pH du duodénum est de 7 (pH neutre).