Correction du baccalauréat ST2S métropole de septembre 2009

Exercice 1

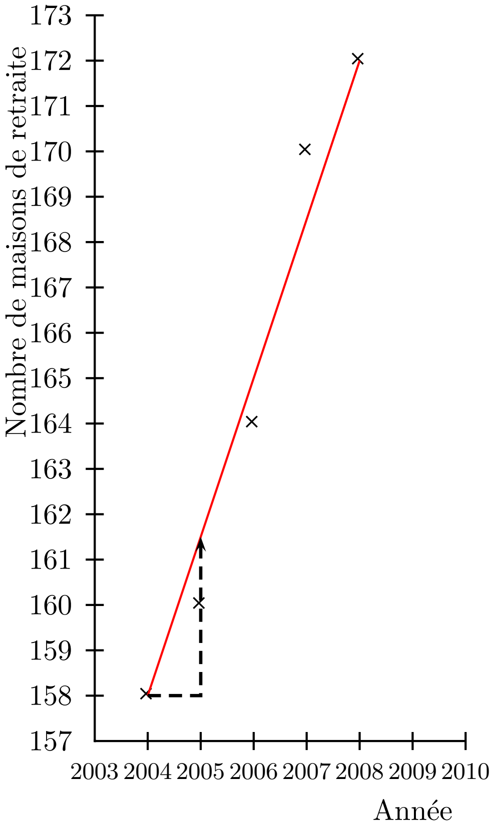
Partie A :

1. Le taux d'évolution se calcule par $\dfrac{v_F - v_I}{v_I}$. Entre entre 2004 et 2008, cela donne $\dfrac{maisons_{2008} - maisons_{2004}}{maisons_{2004}} = \dfrac{172-158}{158} \approx 0,089$ soit $\boxed{\text{la réponse b}}$.

2. $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{160-158}{158} \approx 0,0127 \approx 1,27\% \\ y = \dfrac{172-170}{170} \approx 0,0118 \approx 1,18\% \end{array}\right\}$ $1,27 > 1,18$ donc $x > y$: $\boxed{\text{réponse a}}$

3. $\left.\begin{array}{l} x_G = \dfrac{2004+2005+2006+2007+2008}{5} = 2006 \\ y_G = \dfrac{158+160+164+170+172}{5} = 164,8 \end{array}\right\}$ Ainsi $\boxed{G(2006;164,8)}$: $\boxed{\text{réponse c}}$

4. Traçons le nuage de points et regardons comment doit être le coefficient directeur pour ajuster correctement :
   On voit par lecture graphique que le coefficient directeur d'une bonne droite d'ajustement est environ 3 (mais il est clair qu'il est bien strictement supérieur à 1) : $\boxed{\text{réponse c}}$.
   Remarque : on pouvait aussi calculer les coefficients directeurs de certaines droites d'ajustement : celle passant par le premier et le dernier point par ex. $\dfrac{172-158}{8-4} = \dfrac{14}{4} = 3,5$. Ce coefficient directeur étant bien au-delà de 1, un bon ajustement ne peut qu'avoir lui aussi un coefficient directeur au-delà de 1.



Partie B :

5. Nous voulons dériver $f(x) = 6x - 0,4x^2$.

$f(x) = 6 \times x - 0,4 \times x^2$.

$f'(x) = 6 \times 1 - 0,4 \times 2x$.

$f'(x) = 6 - 0,8x$: $\boxed{\text{réponse b}}$.

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dériver : dans chaque terme garder la constante et dériver la fonction de référence.

3 : Simplifier.

6. f est une fonction exponentielle de base 0,8 or $0 < 0,8 < 1$, donc la fonction f est décroissante.
g est une fonction exponentielle de base 1,13 or $1,13 > 1$, donc la fonction g est croissante.
Pour h, le sens de variation théorique est hors programme directement. On peut le retrouver de deux manières :
- à l'aide du tracé de la courbe sur calculatrice (c'est certainement le plus simple)
- à l'aide du signe de la dérivée : $h'(x) = -2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc h' est toujours négative sur $[0;+\infty[$ ainsi h est décroissante

Seule la fonction g est croissante sur $[0;+\infty[$ parmi les trois proposées : $\boxed{\text{réponse a}}$.

Exercice 2

1. Remplissons le tableau à double entrée à l'aide des données :
   – Il y a quatre-vingt dix élèves interrogés : le total / total est donc de 90.
   – Un tiers des élèves correspond à $\frac{1}{3} \times 90 = 30$ élèves. C'est le total de la colonne "O".
   – 30% des élèves du groupe O correspond à $\frac{30}{100} \times 30 = 9$ élèves. On met se résultat à l'intersection de la colonne "O" et de la ligne "négatif".
   – 50% des élèves correspond à $\frac{50}{100} \times 90 = 45$ élèves. C'est le total de la colonne "A". On met ensuite 6 à l'intersection de la colonne "A" et de la ligne "négatif".
   – On met 4 comme total de la colonne "AB", ainsi qu'à l'intersection de la colonne "AB" et de la ligne "positif".
   – 20% des élèves correspond à $\frac{20}{100} \times 90 = 18$ élèves. C'est le total de la ligne "négatif". On peut alors remplir les 7 dernières cases par soustraction.

Rhésus \ Groupe	A	B	AB	O	total
+	39	8	4	21	72
-	6	3	0	9	18
total	45	11	4	30	90

2. On choisit "au hasard" donc nous sommes dans un cas d'équiprobabilité : ainsi la probabilité d'un évènement est donnée par la formule $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas au total}}$.
   (a) $\boxed{D = A \cap C}$.
   (b) $P(A) = \boxed{\frac{45}{90}}$; $P(B) = \boxed{\frac{11}{90}}$; $P(C) = \boxed{\frac{72}{90}}$; $P(D) = \boxed{\frac{39}{90}}$
   (c) $B \cup \overline{C} =$ ≪ l'élève est du groupe B ou a un rhésus négatif ≫
   Remarque : on pouvait également écrire ≪ l'élève est du groupe B ou n'a pas un rhésus positif ≫.

   On peut utiliser la formule $P(B \cup \overline{C}) = P(B) + P(\overline{C}) - P(B \cap \overline{C})$.
   Pour calculer $P(\overline{C})$ on peut utiliser la formule $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{72}{90} = \frac{18}{90}$. On peut aussi s'en rendre compte immédiatement car $\overline{C} =$ ≪ l'élève a un rhésus négatif ≫.
   Enfin, $B \cap \overline{C} =$ ≪ l'élève est du groupe B et a un rhésus négatif ≫ donc on lit dans le tableau que $P(B \cap \overline{C}) = \frac{3}{90}$.
   On conclut que $P(B \cup \overline{C}) = \frac{11}{90} + \frac{18}{90} - \frac{3}{90} = \boxed{\frac{26}{90}}$.

   Remarque : on pouvait également lire dans le tableau les cases qui correspondent à l'évènement $B \cup \overline{C}$. Effectivement cet évènement est composé des évènement élémentaires A^- ; B^- ; AB^- ; O^- et B^+. Ainsi la probabilité est égale à $\frac{6+3+0+9+8}{90}$.
3. Sur les 72 élèves de rhésus positif, 8 sont du groupe B. La probabilité qu'un élève soit du groupe B sachant qu'il est de rhésus positif est donc égale à $\boxed{\frac{8}{72}}$

Remarque : On pouvait également utiliser la formule $P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{8}{90}}{\frac{72}{90}} = \frac{8}{90} \times \frac{90}{72} = \frac{8}{72}$.

Exercice 3

1. (a) Chaque année, le nombre de nouveaux cas augmente de 15%. Ainsi dans la suite (u_n), pour aller d'un terme au suivant, il faut multiplier par $1 + \text{taux} = 1 + 15\% = 1,15$.

   On multiplie toujours par le même nombre, $1,15$, pour aller d'un terme au suivant, donc nous venons bien de justifier que la suite (u_n) est géométrique de raison $1,15$.

   (b) Puisque nous avons une suite géométrique, nous pouvons écrire que, pour tout entier positif n : $u_n = u_0 \times (raison)^n$. Dans le cas qui nous intéresse, cela donne ainsi $u_n = 300 \times 1,15^n$.

   L'année 2008 correspond au rang $n = 3$ (car $2008 = 2005+3$) donc on calcule $u_3 = 300 \times 1,15^3 \approx 456$. Il y a donc bien $\boxed{\text{458 nouveaux cas en 2008}}$.

   Remarque : on pouvait également, sans la formule trouvée à cette question, calculer $u_1 = 1,15 \times u_0$ puis $u_2 = 1,15 \times u_1$ et enfin $u_3 = 1,15 \times u_2$.

   (c) L'année 2015 correspond au rang $n = 10$ (car $2015 = 2005 + 10$) donc on calcule :
   $u_{10} = 300 \times 1,15^{10} \approx 1\ 214$.

   Si la progression reste identique, on peut prévoir $\boxed{\text{1 214 nouveaux cas en 2015}}$.

   (d) Il s'agit de résoudre l'équation $u_n \geq 10\ 000$, c'est à dire $300 \times 1,15^n \geq 10\ 000$. Pour cela on utilise le logarithme, soit tout de suite soit en divisant d'abord.

   Méthode 1 :

$$\begin{array}{rcll}
300 \times 1,15^n & \geq & 10\ 000 & \\
 & & & \text{On "passe au logarithme"} \\
log(300 \times 1,15^n) & \geq & log(10\ 000) & \\
 & & & log(a \times b) = log(a) + log(b) \\
log(300) + log(1,15^n) & \geq & log(10\ 000) & \\
 & & & log(a^x) = x \times log(a) \\
log(300) + n \times log(1,15) & \geq & log(10\ 000) & \\
 & & & -log(300) \\
n \times log(1,15) & \geq & log(10\ 000) - log(300) & \\
 & & & \div log(1,15) \\
n & \geq & \dfrac{log(10\ 000) - log(300)}{log(1,15)} &
\end{array}$$

   Dans la division $log(1,15)$ est un nombre positif donc on ne change pas le sens de l'inégalité.

   Méthode 2 :

$$\begin{array}{rcll}
300 \times 1,15^n & \geq & 10\ 000 & \\
 & & & \div 300 \\
1,15^n & \geq & \dfrac{10\ 000}{300} & \\
 & & & \text{On "passe au logarithme"} \\
log(1,15^n) & \geq & log\left(\dfrac{100}{3}\right) & \\
 & & & log(a^x) = x \times log(a) \\
n \times log(1,15) & \geq & log\left(\dfrac{100}{3}\right) & \\
 & & & \div log(1,15) \\
n & \geq & \dfrac{log(\frac{100}{3})}{log(1,15)} &
\end{array}$$

   Remarque : $\dfrac{log(10\ 000) - log(300)}{log(1,15)}$ et $\dfrac{log(\frac{100}{3})}{log(1,15)}$ sont bien sûr les mêmes nombres, écrits différemment.

   $\dfrac{log(\frac{100}{3})}{log(1,15)} \approx 25,1$. Le plus petit entier supérieur à ce nombre est donc $n = 26$. L'année correspondante est donc $2005 + 26 = 2031$. On peut donc estimer que le nombre de nouveaux cas dépassera 10 000 personnes pour la première fois $\boxed{\text{en 2031}}$.

   Remarque : on pouvait aussi s'aider de la calculatrice, rentrer $Y1 = 300 \times 1,15 \wedge X$ et avec une table de valeurs, regarder à partir de quand les valeurs deviennent supérieures à 10 000.

   (e) L'année 2008 correspond au rang $n = 3$ (car $2008 = 2005 + 3$) donc on calcule $u_0 + u_1 + u_2 + u_3$. A l'aide de la formule, on calcule donc $u_0 \times \dfrac{1 - q^{3+1}}{1 - q} = 300 \times \dfrac{1 - 1,15^4}{1 - 1,15} \approx 1\ 498$.

   Ainsi en 2008, $\boxed{\text{1 498 personnes}}$ ont contracté la maladie depuis son apparition.

   Remarque : on pouvait bien sûr également calculer la somme de ces 4 valeurs "à la main".

(f) L'année 2015 correspond au rang $n = 10$ (car $2015 = 2005 + 10$) donc on calcule $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.
A l'aide de la formule, on calcule donc $u_0 \times \dfrac{1 - q^{10+1}}{1 - q} = 300 \times \dfrac{1 - 1,15^{11}}{1 - 1,15} \approx 7\ 305$.

Ainsi en 2015, $\boxed{\text{7 305 personnes}}$ ont contracté la maladie depuis son apparition.

2. (a) Chaque année, le coût de traitement baisse de 5€. Ainsi en 2006 le coût est de $400 - 5 = 395$€, en 2007 de 390€ et en 2008 de 385€.
En 2008, le coût du traitement est de $\boxed{\text{385€}}$.

(b) En 2005 il y avait 300 malades et le coût par malade était de 400€ donc le coût global du traitement pour tous les malades en 2005 s'élevait à 300×400€= $\boxed{\text{120 000€}}$.
En 2006, il y a eu $300 \times 1,15 = 345$ nouveaux malades, soit au total $300 + 345 = 645$ malades. Le coût par malade était de 395€ par malade, donc le coût global du traitement pour tous les malades en 2006 s'élevait à 645×295€= $\boxed{\text{254 775€}}$.

(c) On pouvait continuer le raisonnement de la question précédente, en calculant jusqu'en 2009 à chaque fois le nombre de malades supplémentaires et le nombre de malades au total. On pouvait aussi se rendre compte que le nombre total de malades en 2009 était calculable comme à la question 1)e) à l'aide de la formule $300 \times \dfrac{1 - 1,15^5}{1 - 1,15}$. Dans tous les cas, on trouvait qu'il y avait en 2009 au total 2 023 malades.
En 2009, le coût individuel de chacun de ces malades est de 380€ (5€ de moins qu'en 2008, valeur calculée en 2)a)).
Ainsi le coût total pour l'année 2009 s'élève à $2\ 023 \times 380$€= 768 740€. Ce coût est inférieur à 1 000 000€ donc $\boxed{\text{le budget sera suffisant}}$.

3. (a) On peut rentrer la formule $\boxed{\text{=C2+B3}}$.

(b) On peut rentrer la formule $\boxed{\text{=C2*D2}}$.