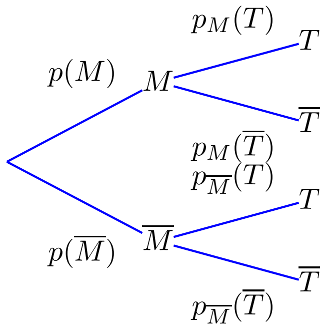
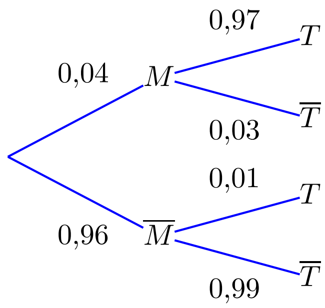
Correction du baccalauréat ST2S Nouvelle Calédonie de novembre 2011

Exercice 1

1. $P(M) = 4\% = \boxed{0,04}$ $\qquad P_M(T) = 0,97$ $\qquad P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,99$

   L'arbre complété est alors le suivant (on rappele la signification dans l'arbre de gauche)





2. $M \cap T$: « la personne choisie est atteinte de la maladie et a un test positif »
   Sur l'arbre, $M \cap T$ correspond à la branche tout en haut. Ainsi $p(M \cap T) = 0,04 \times 0,97 = \boxed{0,0388}$ (ce qui correspond à la formule $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T)$)
3. Un résultat est correct exactement dans les deux cas suivants : lorsque la personne est malade et que son test est positif (évènement $M \cap T$) ; lorsque la personne n'est pas malade et que son test est négatif (évènement $\overline{M} \cap \overline{T}$)
   On vient de calculer la probabilité de $M \cap T$. L'évènement $\overline{M} \cap \overline{T}$ correspond à la branche tout en bas de l'arbre, ainsi on a directement :
   $P(\text{test correct}) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,0388 + 0,96 \times 0,99 = 0,9892.$
4. (a) L'évènement T est constitué des évènements élémentaires $M \cap T$ et $\overline{M} \cap T$. On en déduit donc :
   $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,0388 + 0,96 \times 0,01 = \boxed{0,0484}$.

   (b) La valeur prédictive de ce test correspond à la probabilité qu'une personne présentant un test positif soit atteinte de la maladie, c'est à dire $P_T(M)$. On vient de nous faire calculer $P(T)$, on peut donc penser à utiliser la formule $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{0,0388}{0,0484} \approx \boxed{0,8017}$.
   Ainsi la valeur prédictive de ce test est égale à 0,8017.

Exercice 2

1. Entre le 1[er] janvier 2007 et le 31 décembre 2010, on a recensé $397 + 429 + 463 + 500 = \boxed{1\ 789}$ nouveaux cas.
2. En C3 on peut lire le taux d'évolution du nombre de nouveaux cas entre l'année 2007 et l'année 2008. Il est donc donné par la formule $\dfrac{cas_{2008} - cas_{2007}}{cas_{2007}}$ c'est à dire ici $\dfrac{C2 - B2}{B2}$. La formule à rentrer est donc $\boxed{= (C2 - B2)/B2}$
3. Chaque année, le nombre de nouveaux cas augmente de 8%. Ainsi dans la suite (u_n), pour aller d'un terme au suivant, il faut multiplier par $1 + \text{taux} = 1 + 8\% = 1,08$.
   On multiplie toujours par le même nombre, $1,08$, pour aller d'un terme au suivant, donc :
   $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } 1,08 \text{ et de premier terme } u_0 = 500}$.
   Puisque nous avons une suite géométrique, nous pouvons écrire que, pour tout entier naturel n :
   $u_n = u_0 \times (raison)^n$. Dans le cas qui nous intéresse, cela donne ainsi $\boxed{u_n = 500 \times 1,08^n}$.
4. L'année 2020 correspond au rang $n = 10$ (car $2020 = 2010 + 10$) donc on calcule :
   $u_{10} = 500 \times 1,08^{10} \approx 1\ 079$.
   Si la progression reste identique, on peut prévoir $\boxed{1\ 079 \text{ nouveaux cas en } 2020}$.

5. (a) Résolvons l'inéquation dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
1,08^x &\geq 3 && \text{On "passe au logarithme" de chaque côté}\\
log(1,08^x) &\geq log(3) && log(a^x) = x \times log(a)\\
x \times log(1,08) &\geq log(3) && \div log(1,08)\\
x &\geq \frac{log(3)}{log(1,08)}
\end{aligned}$$

Dans la division $log(1,08)$ est un nombre positif donc on ne change pas le sens de l'inégalité.

Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\left[\frac{log(3)}{log(1,08)}; +\infty\right[}$.

(b) Le nombre de nouveaux cas est modélisé par la suite (u_n), on cherche donc à savoir quel est le premier n pour lequel $u_n > 1\ 500$.

<u>Méthode calculatoire :</u>

$$\begin{aligned}
u_n &> 1\ 500 && \text{On remplace } u_n \text{ par sa valeur}\\
500 \times 1,08^x &> 1\ 500 && \div 500\\
1,08^x &> \frac{1\ 500}{500} && \text{On simplifie}\\
1,08^x &> 3
\end{aligned}$$

D'après la question 5)a), cette inégalité est vraie après $\frac{log(3)}{log(1,08)} \approx 14,3$. Le premier entier plus grand est 15. Cela correspond à l'année $2010 + 15 = 2025$.

Ainsi, $\boxed{\text{à partir de 2025 le nombre de nouveaux cas sera supérieur à 1 500.}}$

<u>Méthode avec la calculatrice :</u>

On pouvait aussi s'aider de la calculatrice : rentrer $Y1 = 500 \times 1,08 \wedge X$ et avec une table de valeurs, regarder à partir de quand les valeurs deviennent inférieures à 1 500.

On voit que $u_{14} \approx 1468,5$ et $u_{15} \approx 1586$, c'est bien la même conclusion.

6. (a) En utilisant la formule donnée par le sujet avec $p = 11$, cela donne :

$$\sum_{n=1}^{11} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{11} = u_1 \times \frac{1-q^{11}}{1-q}$$

q est la raison, ici elle vaut $1,08$.

u_1 se calcule avec la formule donnée en 3) : $u_1 = 500 \times 1,08^1 = 540$.

On a donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{11} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{11} = 540 \times \frac{1-1,08^1 1}{1-1,08} \approx \boxed{8\ 989}$.

(b) D'après la question 1), il y a eu 1 789 nouveaux cas entre 2007 et 2010. Le calcul mené dans la question 6)a) nous montre qu'il y a eu 8 989 nouveaux cas entre 2011 et 2012.

On peut donc estimer que $\boxed{10\ 778}$ personnes auront contracté la maladie au cours des quinze années suivant son apparition.

Exercice 3

Partie A : étude de la première phase - avant introduction de l'antibiotique

1. f est une fonction exponentielle de base $1,2$ or $1,2 > 1$ donc f est strictement croissante sur $[0;3]$.
   Remarque : on pouvait aussi dire que sur $[0;3]$ on donne le graphique de la fonction f : sur ce graphique la courbe monte donc la fonction f est croissante sur $[0;3]$.
2. Cette fois-ci on n'a pas le choix, il faut utiliser l'expression de f puisqu'on nous demande un calcul et que $f(t)$ représente le nombre de bactéries au bout de t heures pour $t \in [0;3]$.
   Au bout d'une heure et demie il y aura $f(1,5) = 1,2^{1,5} \approx \boxed{1,315}$ dizaines de milliers de bactéries présentes dans la culture.
   Au bout de trois heures il y aura $f(3) = 1,2^3 = \boxed{1,728}$ dizaines de milliers de bactéries présentes dans la culture.

Partie B : étude de la seconde phase - après introduction de l'antibiotique

1. Nous avons l'expression de g donc pour calculer l'image de $7,5$ il suffit de remplacer t par $7,5$:
   $g(7,5) = -0,1536 \times 7,5^2 + 1,2288 \times 7,5 - 0,576 = \boxed{0}$
   Cela veut dire qu'au bout de sept heures et demi, il n'y a plus de bactéries dans la culture.
2. Nous voulons dériver $g(t) = -0,1536t^2 + 1,2288t - 0,576$.

$$g(t) = (-0,1536) \times t^2 + 1,2288 \times t - 0,576.$$
$$g'(t) = (-0,1536) \times 2t + 1,2288 \times 1 - 0$$
$$\boxed{g'(t) = -0,3072t + 1,2288}.$$

1 : Ecrire chaque terme de g comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dériver : dans chaque terme garder la constante et dériver la fonction de référence.

3 : Simplifier.

3.
$$\begin{array}{rcll} g'(t) & \geq & 0 & \\ & & & \text{On remplace } g'(t) \text{ par sa valeur} \\ -0,3072t + 1,2288 & \geq & 0 & \\ & & & -1,2288 \\ -0,3072t & \geq & -1,2288 & \\ & & & \div(-0,3072) \text{ : on change le sens de l'inégalité !} \\ t & \leq & \dfrac{-1,2288}{-0,3072} & \\ & & & \text{On simplifie} \\ t & \leq & 4 & \end{array}$$

On obtient alors le tableau suivant :

t	3		4		$7,5$
Sgn. $g'(t)$		$+$	0	$-$	
Var. g	$1,728$	$\nearrow$	$1,8816$	$\searrow$	0

4. Au cours de la première heure suivant l'introduction de l'antibiotique, le nombre de bactéries continue à augmenter, puis, au cours des trois heures et demie suivantes, il se met à diminuer jusqu'à atteindre zéro.
5. D'après le tableau de variations tracé à la question 3), la fonction g admet un maximum de 1,8816 dizaine de milliers de bactéries, c'est à dire 18 816 bactéries, ce qui est bien moins que 20 000.
   $\boxed{\text{Oui}}$: l'introduction de l'antibiotique a donc permis d'éviter que le nombre de bactéries n'atteigne 20 000.