Correction du baccalauréat ST2S Polynésie de juin 2009

Exercice 1

L'énoncé propose de présenter les données dans un tableau afin d'aider à répondre aux question. Remplissons donc un tableau à double entrée à l'aide des données :

- 60% correspond à 60 personnes. Ainsi le total de la colonne "femme" vaut 60.
  On conclut donc que le total de la colonne "homme" vaut 100 - 60 = 40.
- 30% correspond à 30 personnes. Ainsi le total de la ligne "mineur" vaut 30.
  On conclut donc que le total de la ligne "majeur" vaut 100 - 30 = 70.
- 16% correspond à 16 personnes. On met ce résultat à l'intersection de la colonne "homme" et de la ligne "mineur". On peut alors remplir les 3 dernières cases par soustraction.

Sexe / Age	Femme (F)	Homme ($\overline{\text{F}}$)	Total
Mineur (M)	14	16	30
Majeur ($\overline{\text{M}}$)	46	24	70
Total	60	40	100

On choisit "au hasard" donc nous sommes dans un cas d'équiprobabilité : ainsi la probabilité d'un évènement est donnée par la formule $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas au total}}$.

Pour les probabilités conditionnelles, on pourra utiliser le fait que la probabilité d'un évènement A sachant l'évènement B est donnée par la formule $\dfrac{\text{nombre de cas favorables pour} A\cap B}{\text{nombre de cas favorables pour B}}$.

1. On nous demande $P(F\cap M)$. On lit dans le tableau $\dfrac{14}{100}$ soit $\boxed{\text{la réponse c}}$.
2. On nous demande $P_F(M)$. On lit dans le tableau $\dfrac{14}{60}$ soit $\boxed{\text{la réponse b}}$.
3. On nous demande $P_{\overline{F}}(\overline{M})$. On lit dans le tableau $\dfrac{24}{40}$ soit $\boxed{\text{la réponse a}}$.
4. On nous demande $P(M\cup F)$. Il y a en tout 46 + 14 + 16 = 76 cas favorables (et toujours 100 cas au total) soit $\boxed{\text{la réponse b}}$.
   On pouvait aussi (et c'est peut être plus simple) utiliser la formule $P(M\cup F) = P(M)+P(F)-P(M\cap F) = \dfrac{30}{100}+\dfrac{60}{100}-\dfrac{14}{100}=\dfrac{76}{100}$
5. On nous demande $P_M(F)$. On lit dans le tableau $\dfrac{14}{30}$ soit $\boxed{\text{la réponse a}}$.

Exercice 2 : on note eff_{date} l'effectif des médecins à la date donnée.

1. (a) Le taux d'évolution se calcule par $\dfrac{v_F - v_I}{v_I}$. Entre 1990 et 2002, cela donne donc $\dfrac{eff_{2002}-eff_{1990}}{eff_{1990}} = \dfrac{205\ 185 - 177\ 470}{177\ 470} \approx \boxed{0,156 \text{ soit } 15,6\%}$
   Le taux d'évolution de l'effectif total des médecins entre 1990 et 2002 est égal à 15,6 %.

   (b) Il suffit de rentrer la formule qui correspond au calcul que l'on vient de faire, en n'oubliant pas les parenthèses : $\boxed{\text{=(C4-B4)/B4}}$.

   (c) Cette question est hors programme (c'est au programme de la série STG).

2. (a) Deux méthodes pour calculer u_1 :
   Méthode du coefficient multiplicateur :
   On connait l'effectif des médecins en 2002 (205 185) ainsi que le taux d'évolution d'une année sur l'autre donc entre 2002 et 2003 (+0,7%). On en déduit donc :
   $u_1 = eff_{2003} = med_{2002} \times (1+\text{taux}_{2002/2003}) = 205\ 185 \times (1+0,7\%) = 870 \times 1,007 \approx \boxed{206\ 621}$
   Méthode du produit en croix :
   Si on a oublié la formule, on peut repasser par le produit en croix :

205 185	$\Leftrightarrow$	100%
?	$\Leftrightarrow$	0,7%

   Ainsi l'augmentation est de $\frac{205\ 185\times 0,7}{100} \approx 1436$ médecins. En 2003 on a donc 1436 médecins de plus qu'en 2002 soit 206 621 en tout : $\boxed{u_1 \approx 206\ 621}$.

(b) Chaque année, le nombre de médecins augmente de $0,7\%$. Ainsi dans la suite (u_n), pour aller d'un terme au suivant, il faut multiplier par $1 + \text{taux} = 1 + 0,7\% = 0,007$.
Ainsi pour tout entier naturel n, on a bien la formule $u_{n+1} = u_n \times 1,007$.

(c) Nous venons de prouver que l'on passe de n'importe quel terme de la suite au suivant en multipliant par $1,007$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } 1,007 \text{ et de premier terme } u_0 = 205\ 185}$.
Puisque nous avons une suite géométrique, nous pouvons écrire que, pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times (raison)^n$. Dans le cas qui nous intéresse, cela donne ainsi $\boxed{u_n = 205\ 185 \times 1,007^n}$.

(d) L'année 2010 correspond au rang $n = 8$ car $2010 = 2002 + 8$. Il faut donc calculer u_8. Pour ce faire, on peut tout simplement utiliser la formule de la question précédente.
$u_8 = 205\ 185 \times 1,007^8 \approx 216\ 961$.
On peut estimer qu'en 2010, le nombre de médecin sera de $\boxed{216\ 961}$.

Exercice 3

Partie A : étude graphique

1. Regardons où il y a plus de 150 000 malades (attention à l'échelle !) : c'est entre les abscisses 4 et environ 10,2. La situation est donc grave pendant un peu plus de 6 jours soit $\boxed{\text{6 jours complets}}$.
2. La droite (OA) a un coefficient directeur de $\dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{112,5}{10} = 11,25$. Cette droite est tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 donc son coefficent directeur est égal au nombre dérivé de f en 0, soit $\boxed{f'(0) = 11,25}$.
3. (a) Graphiquement, le maximum est atteint à peu près $\boxed{\text{au bout de 7 jours et demi}}$. Ce maximum est à peu près égal à $\boxed{250\ 000\ \text{ malades}}$. Le maximum correspond à un nombre dérivé nul, donc $f'(7,5) = 0$. La vitesse d'évolution est donc nulle $\boxed{\text{au bout de 7 jours et demi}}$.
   (b) Le moment de l'épidémie où la maladie progresse le plus correspond au nombre dérivé maximal, donc à la tangente dont le coefficient directeur est le plus grand. On voit graphiquement que c'est le cas $\boxed{\text{entre le 3}^{\text{e}} \text{ et le 4}^{\text{e}} \text{ jour}}$.

Partie B : étude théorique

1.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(t)$	0	20,75	56,5	101,25	149	193,75	229,5	250,25	250	222,75	162,5	63,25

2. Nous voulons dériver $f(t) = -t^3 + \dfrac{21}{2}t^2 + \dfrac{45}{4}t$.

$$f(t) = (-1) \times t^3 + \frac{21}{2} \times t^2 + \frac{45}{4} \times t.$$

$$f'(t) = (-1) \times 3t^2 + \frac{21}{2} \times 2t + \frac{45}{4} \times 1$$

$$\boxed{f'(t) = -3t^2 + 21t + \frac{45}{4}}.$$

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dériver : dans chaque terme garder la constante et dériver la fonction de référence.

3 : Simplifier.

Nous allons développer l'expression de l'énoncé pour retrouver l'expression de f' calculée :

$$\begin{aligned}
& -3\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{15}{2}\right) \\
= \quad & -3\left(t \times t - t \times \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \times t - \frac{1}{2} \times \frac{15}{2}\right) \\
= \quad & -3\left(t^2 - \frac{15}{2}t + \frac{1}{2}t - \frac{1 \times 15}{2 \times 2}\right) \\
= \quad & -3\left(t^2 - \frac{14}{2}t - \frac{15}{4}\right) \\
= \quad & -3\left(t^2 - 7t - \frac{15}{4}\right) \\
= \quad & -3 \times t^2 - 3 \times (-7t) - 3 \times \frac{15}{4} \\
= \quad & -3t^2 + 21t - \frac{45}{4} \\
= \quad & f'(t)
\end{aligned}$$

Nous venons bien de démontrer que $\boxed{-3\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{15}{2}\right) = f'(t)}$.

3. Nous devons étudier le signe d'un produit (de 3 facteurs) donc nous allons utiliser un tableau de signes.
   - -3 est toujours négatif
   - $t + \frac{1}{2} > 0$; $t > -\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$
   - $t - \frac{15}{2} > 0$; $t > \frac{15}{2}$; $+\frac{15}{2}$

   Nous devons étudier le signe sur $[0; 11]$, dans la ligne des t on va donc aller de 0 à 11 (on ne va donc pas placer $-\frac{1}{2}$ qu'on a trouvé en étudiant le signe du second facteur)

t	0		$\frac{15}{2}$		11
Sgn. -3		$-$		$-$	
Sgn. $(t+\frac{1}{2})$		$+$		$+$	
Sgn. $(t-\frac{15}{2})$		$-$	0	$+$	
Sgn. $f'(t)$		$+$	0	$-$	

Ceci est cohérent avec l'allure de la courbe : effectivement entre 0 et 7,5 (effectivement, $\frac{15}{2} = 7,5$) la courbe monte (ce qui correspond bien au signe "+" de la dérivée) et entre 7,5 et 11 la courbe descend (ce qui correspond bien au signe "-" de la dérivée)

4. Pour calculer $f'(0)$, il faut remplacer t par 0 dans l'expression de f'. Nous allons utiliser la forme de f' qui est donnée par l'énoncé : $-3\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{15}{2}\right)$. Effectivement, nous sommes certains que cette expression est juste, alors que notre calcul peut être faux.
   $f'(0) = -3\left(0+\frac{1}{2}\right)\left(0-\frac{15}{2}\right) = \frac{-3}{1} \times \frac{1}{2} \times (\frac{-15}{2}) = \frac{-3 \times 1 \times (-15)}{1 \times 2 \times 2} = \frac{45}{4} = \boxed{11,25}$.
   Remarque : on pouvait également utiliser l'expression de f' calculée : $-3t^2 + 21t + \frac{45}{4}$. Cela donnait évidemment le même résultat s'il n'y avait pas d'erreur : $f'(0) = -3 \times 0^2 + 21 \times 0 + \frac{45}{4} = \frac{45}{4} = 11,25$.