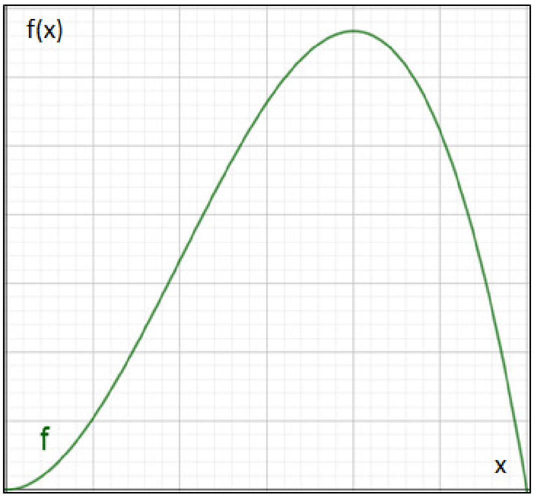
**Exercise 1** Calc. : ✗

Ein kleiner Hügel auf einem Spielplatz kann durch eine Funktion $f$ modelliert werden mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$, für $x > 0$ wobei $x$ die Entfernung in Metern (m) ist und $f(x)$ die Höhe in Metern (m) ist. Das Bild zeigt den Graphen $f$ dieser Funktion.




**Bestimmen** Sie die Höhe dieses Hügels. 5 marks

**Exercise 2** Calc. : ✗

Nach einigen Beschwerden über das Mittagessen in der Kantine behauptet der Manager, dass maximal nur 20% aller 2.500 Schüler mit dem Mittagessen unzufrieden sind. Der Schülerausschuss denkt, dass es mehr als 20% der Schüler sind. Also fragen sie eine Gruppe von 40 zufällig ausgewählten Schülern nach ihrer Meinung.

1. **Erläutern** Sie, ob zur Überprüfung dieser Hypothese ein linksseitiger oder ein rechtsseitiger Test verwendet werden sollte. Begründen Sie Ihre Antwort. 2 marks
2. **Geben** Sie **an**, welche Nullhypothese $H_0$ für einen NHST-Test verwendet werden könnte und nennen Sie die Alternativhypothese $H_1$. 1 mark
3. **Bestimmen** Sie den kritischen Wert $k$ mit Hilfe der folgenden Tabelle, wenn das Signifikanzniveau auf 5% festgelegt ist und **interpretieren** Sie diesen Wert. 2 marks

| $k$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X \geq k)$ | 0,563 | 0,407 | 0,268 | 0,161 | 0,088 | 0,043 | 0,019 | 0,008 |

**Exercise 3** Calc. : ✗

Eine kleine Supermarktkette beschäftigt 900 Mitarbeiter. 10 von ihnen arbeiten in der Geschäftsleitung, aber nur einer der Manager ist weiblich. Die anderen 809 Frauen arbeiten in den Geschäften.
**Zeigen** Sie, dass es vom Geschlecht abhängt, ob man eine Stelle im Management dieser Firma bekommt. 5 marks

**Exercise 4** Calc. : ✗

Ein Ehepaar benötigt einen negativen Covid-Test, um Freunde im Ausland zu besuchen. Es ist bekannt, dass 20% der Tests ein negatives Ergebnis zeigen, obwohl die Person infiziert sein könnte (falsch negatives Ergebnis). Die Wahrscheinlichkeit eines falsch positiven Ergebnisses liegt nahe bei null. Es kann davon ausgegangen werden, dass, wenn einer von ihnen infiziert ist, auch der andere infiziert ist.
**Erläutern** Sie, warum diese Situation ein Bernoulli-Prozess ist, und **zeigen** Sie, dass die Wahrscheinlichkeit eines falsch negativen Ergebnisses auf 4% sinkt, wenn beide getestet werden. 5 marks

**Exercise 5** Calc. : ✗

In dem unten abgebildeten Diagramm ist die Anzahl der neuen Covid-19-Fälle in Deutschland über einen Zeitraum von 3 Wochen im Oktober 2020 dargestellt. Um die Zahlen in der Zukunft vorherzusagen, können zwei grundlegende Arten von mathematischen Modellen kombiniert werden.


**Nennen** Sie die Namen dieser Modelltypen und **begründen** Sie Ihre Antwort. 5 marks

**Sagen** Sie ein Datum in der Zukunft **voraus**, an dem ein weiteres Maximum erreicht wird, wenn die Zahlen den Modellen folgen.

**Exercise 6** Calc. : ✗

In einem Labor wird die Anzahl von Bakterien in einer Petrischale untersucht. Es stellt sich heraus, dass, unter bestimmten Bedingungen, das Wachstum durch die Funktion $N$ modelliert werden kann mit

$$N(t) = 10\,000 \cdot \mathrm{e}^{\ln(1{,}03)\cdot t},$$

wobei $N(t)$ die Anzahl der Bakterien nach $t$ Tagen.

1. **Geben** Sie die Anzahl der Bakterien zu Beginn und die Wachstumsrate [pro Tag] in Prozent **an**. 2 marks
2. **Berechnen** Sie die Anzahl der Bakterien nach dem ersten Tag. 2 marks
3. **Erklären** Sie, warum dieses Modell nicht auf einer sehr groSSen Zeitskala verwendet werden kann. 1 mark

**Exercise 7** Calc. : ✗

**Geben** Sie **an**, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und **begründen** Sie Ihre Antwort. Beachten Sie, dass die Punkte nur vergeben werden, wenn Antwort und Begründung richtig sind.

1. Wenn die Temperatur $T(x)$ ständig ansteigt, dann gilt $T'(x) > 0$. 1 mark
2. Alle periodischen Modelle können durch eine Sinusfunktion modelliert werden. 1 mark
3. Es gibt 9 verschiedene Möglichkeiten für 3 Schüler, nebeneinander zu stehen. 1 mark
4. Wenn ein Würfel einmal geworfen wird, ist der Erwartungswert 3,5. 1 mark
5. Wenn 10 Personen aus einer sehr groSSen Gruppe ausgewählt werden, kann die Anzahl der Frauen durch eine Binomialverteilung modelliert werden, obwohl eine Person nicht mehr als einmal ausgewählt werden kann. 1 mark

**Exercise 8** Calc. : ✗

| | |
|---|---|
| Die Tageslänge $L(t)$ in Stunden an einem bestimmten Ort wurde über ein Jahr aufgezeichnet. Sie kann durch die Funktion $L$ modelliert werden, mit $$L(t) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}t\right) + 12,$$ wobei $t$ die Zeit in Tagen ist. **Interpretieren** Sie das Ergebnis von $\int_0^{365} L(t)\,\mathrm{d}t$ und **erklären** Sie, warum das Ergebnis gleich $12 \cdot 365 = 4\,380$ ist. | 5 marks |

**Exercise 9** Calc. : ✗

| | |
|---|---|
| 1. **Interpretieren** Sie, was der Erwartungswert einer Zufallsvariablen bedeutet. | 2 marks |
| 2. $X$ ist eine Zufallsvariable, die einer Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu$ und Standardabweichung $\sigma$ folgt. **Geben** Sie eine Wahrscheinlichkeit an, welche die beiden charakteristischen Werte $\mu$ und $\sigma$ berücksichtigt. | 1 mark |
| 3. Es sei eine auf $\mathbb{R}$ definierte stetige Zufallsvariable $Y$ gegeben durch $P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$. **Erklären** Sie warum $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = 1$. | 2 marks |

**Exercise 10** Calc. : ✗

| | |
|---|---|
| Ein neues Gerät erkennt Doping im Blut.<br>Man betrachtet die folgenden zwei Ereignisse:<br>• P: Der Test ist positiv<br>• D: Der Sportler war gedopt<br><br>Nach einigen Testläufen wurde herausgefunden, dass von 100 Blutproben mit Doping das Gerät dieses in 90 Fällen erkennt. Es gibt aber auch in 5% der Fälle einen Fehlalarm, wenn die Probe sauber war. Es kann davon ausgegangen werden, dass jeder 10. Sportler bei einer bestimmten Veranstaltung gedopt ist.<br><br>Man will herausfinden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Sportler tatsächlich gedopt war, wenn der Test positiv ist.<br><br>1. **Stellen** Sie alle notwendigen Informationen in der korrekten mathematischen Schreibweise **dar**.<br>2. **Verwenden** Sie eine geeignete Methode, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass ein Sportler gedopt war, wenn der Test positiv war. | 5 marks |