

**Exercice 1**

Calc. : ✓

Tom et Simon jouent à un jeu de société. Chaque fois que Tom parvient à déplacer son pion d'un tour complet sur le plateau, il obtient 5 points. Chaque fois que Simon réussit à déplacer son pion d'un tour complet sur le plateau, il obtient 10% de la quantité précédente. Ils commencent tous les deux avec 10 points.

2 marks

1. **Calculer** le score total de Tom après avoir fait 20 fois le tour du plateau.

2 marks

2. **Écrire** en fonction de  $n$ , l'expression de  $T(n)$  donnant le score de Tom après  $n$  déplacements d'un tour sur le plateau.

2 marks

3. Si l'on suppose que le score de Simon après  $n$  tours autour du plateau peut être modélisé par une suite géométrique, **expliquer** l'utilisation de la formule :

$$S(n) = 11 \cdot 1,1^{n-1}$$

3 marks

4. Simon et Tom ont fait le même nombre de fois le tour du plateau. Le score de Simon vient de dépasser celui de Tom.

**Trouver** combien de fois ils ont fait le tour du plateau.

Tom défie Simon à un jeu de dés. Deux dés à six faces sont lancés et la somme des scores est notée. Pour une somme inférieure à 6 Simon reçoit 10 centimes, pour une somme comprise entre 6 et 9, Simon perd 5 centimes et pour une somme supérieure ou égale à 10, Simon reçoit 30 centimes. Les gains sont déterminés par la distribution de probabilité ci-dessous, où la variable aléatoire  $N$  est la somme des scores.

$N$	$n < 6$	$6 \leq n \leq 9$	$n \geq 10$
Gains $n$	10 centimes	-5 centimes	30 centimes
$P(N = n)$	$a$	$\frac{20}{36}$	$b$

2 marks

5. **Montrer** que  $a = \frac{10}{36}$  et  $b = \frac{6}{36}$ .

2 marks

6. **Calculer** l'espérance des gains de Simon dans ce jeu et dites si cela vaut la peine que Simon y joue.

2 marks

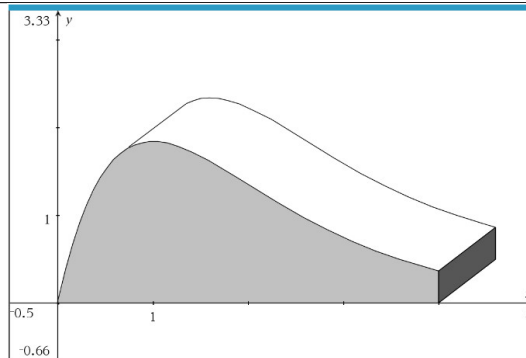
7. Un jeu est dit équitable si l'espérance des gains est égale à 0.

**Déterminer** combien de centimes doivent être perdus pour une somme comprise entre 6 et 9 afin que ce jeu soit équitable.

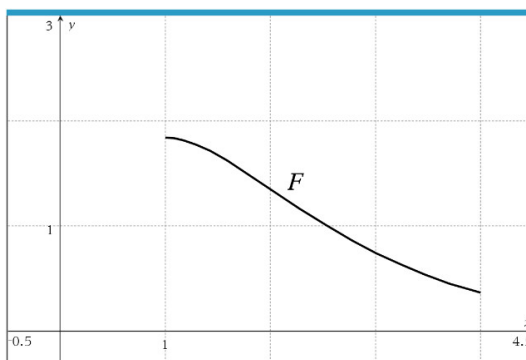
**Exercice 2**

Calc. : ✓

Un fabricant d'aires de jeux pour enfants souhaite proposer à ses clients un nouveau modèle de toboggan. Il crée un diagramme du toboggan proposé en projection oblique :



Le profil de cette glissière est mesuré en mètres et peut être modélisé par la fonction  $F$  définie par  $F(x) = (ax - b)e^{-x}$  pour  $1 \leq x \leq 4$  où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres. La fonction  $F$  a été représentée ci-dessous.



3 marks

1. On prévoit que la tangente à la fonction  $F$  au point d'abscisse  $x = 1$  soit horizontale.

**Déterminer** la valeur du paramètre  $b$ .

2 marks

2. Il est également prévu que le sommet du toboggan soit à 1,85 mètres.

**Déterminer** la valeur du paramètre  $a$ .

2 marks

Le profil du mur est finalement modélisé par la fonction  $F$  définie par  $F(x) = 5x \cdot e^{-x}$ .

3. **Montrer** que l'aire totale de chaque paroi latérale, ombrée sur le diagramme, est égale à  $5 - \frac{25}{e^4}$  m<sup>2</sup>.

3 marks

4. **Déterminer** le point du toboggan où la pente est la plus grande.

**Exercice 3**

Calc. : ✓

Les détecteurs de fumée optiques contiennent une cellule photoélectrique comme composant important. Une usine produit à cet effet des cellules photoélectriques. Un dispositif vérifie automatiquement les cellules photoélectriques et rejette celles qui sont défectueuses. En moyenne, il est précis à 86%. Cependant, on constate que la précision du dispositif varie — parfois il détecte un pourcentage plus élevé de cellules photoélectriques défectueuses et parfois un pourcentage plus faible. On constate que la précision du dispositif est modélisée par une distribution normale avec un écart type de 5%.

1 mark 1. **Déterminer** la probabilité que le dispositif soit précis à moins de 85%.

2 marks 2.  $\frac{9}{10}$  du temps, le dispositif est précis à moins de  $x\%$ . **Déterminer**  $x$ .

2 marks 3. Sachant qu'un jour déterminé, le dispositif a une précision inférieure à 90%, **déterminer** la probabilité qu'il ait une précision supérieure à 85%.

La fiabilité de deux types de détecteurs de fumée optiques est testée. Plus la probabilité qu'une alarme soit déclenchée est élevée, plus le détecteur est fiable.

Le type A contient une seule photocellule et se déclenche lorsque cette photocellule est activée.

Le type B contient trois cellules photoélectriques et se déclenche si au moins deux des trois cellules photoélectriques sont activées.

La probabilité qu'une cellule photoélectrique soit activée en présence de fumée est  $p$ . La probabilité que les deux types d'alarme soient déclenchés est calculée pour différentes valeurs de  $p$ .

$P(A_p)$  est la probabilité que le type A soit déclenché lorsque la probabilité est  $p$ ,  $P(B_p)$  est la probabilité que le type B soit déclenché lorsque la probabilité est  $p$ .

4 marks 4. **Compléter** le tableau ci-dessous.

$p$	0,3	0,5	0,7
$P(A_p)$	0,3	0,5	0,7
$P(B_p)$			
Type plus fiable			

2 marks 5. **Déterminer** pour quelle valeur de  $p$ , le type B devient plus fiable que le type A.

4 marks 6. **Montrer** que l'on a les expressions suivantes en fonction de  $p$  :

$$P(A_p) = p \quad \text{et} \quad P(B_p) = -2p^3 + 3p^2.$$

3 marks 7. **Expliquer** la signification de la fonction  $R$  suivante par rapport au contexte de la question. **Expliquer** les calculs des lignes (1) à (3) et **interpréter** le résultat.

$$R : p \mapsto R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p$$

(1)  $R'(p) = -6p^2 + 6p - 1$   
 (2)  $R'(p_1) = 0 \Rightarrow p_1 \approx 0,79$   
 (3)  $R''(p_1) < 0$

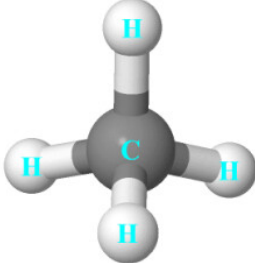
**Exercise 4**

Calc. : ✓

	Soit un plan $E$ d'équation $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$ et pour chaque valeur $a \in \mathbb{R}$ , une droite $g_a$ d'équation paramétrique :
	$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$
4 marks	1. <b>Déterminer</b> les coordonnées de l'intersection de la droite $g_a$ avec le plan $E$ en fonction de $a$ .
3 marks	2. <b>Trouver</b> pour quelle valeur de $a$ il n'y a pas de solution. <b>Interpréter</b> le résultat de manière géométrique.

**Exercise 5**

Calc. : ✓

	The methane molecule $\text{CH}_4$ , represented opposite, can be modeled by a regular tetrahedron $\text{OABD}$ , with $\text{O}(0; 0; 0)$ , $\text{A}(3; \sqrt{3}; 2\sqrt{6})$ , $\text{B}(3; 3\sqrt{3}; 0)$ and $\text{D}(6; 0; 0)$ . The four vertices are the positions of the hydrogen atoms H. We are interested in this exercise in the position of the carbon atom C, inside this tetrahedron. This position is represented by a point that we call G.	
1 mark	1. The tetrahedron is regular, so all of its edges have the same length. Justify that this length is equal to 6.	
2 marks	2. Justify that the coordinates of the orthogonal project $A'$ of A on the plane (Oxy) with equation $z = 0$ are $A'(3; \sqrt{3}; 0)$ .	
	3. The point G is the intersection of $(AA')$ and $(IJ)$ , where $I\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{6}\right)$ is the middle of segment $[AO]$ and $J\left(\frac{9}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ the middle of the segment $[BD]$ .	
3 marks	(a) Prove that the coordinates of G are $\left(3; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ .	
1 mark	(b) Check that the distance between G and A is equal to $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ . We admit that it is also the distance between G and the other vertices of the tetrahedron.	
2 marks	(c) In reality, the length of the C–H bond is approximately equal to 109 picometers. Determine an approximate value, in picometers, the distance between two hydrogen atoms.	
3 marks	4. Give an approximate value of the measure of the angle formed by two C–H bonds.	

**Exercise 6**

Calc. : ✓

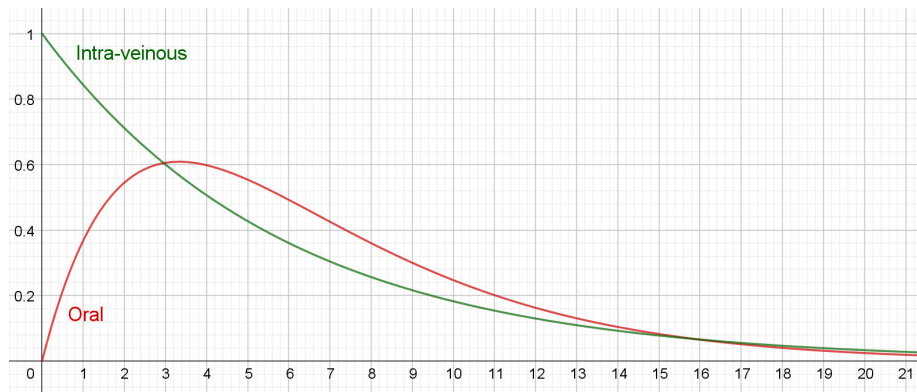
<p>2 marks 3 marks</p>	<p>1. Let the complex number <math>w = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i</math>.</p> <p>(a) Write <math>w</math> in exponential form.</p> <p>(b) Determine the values of the natural number <math>n</math> for which <math>w^n</math> is a real number.</p>
<p>2 marks 3 marks</p>	<p>2. For any natural number <math>n</math>, we note <math>M_n</math> the affix point <math>z_n</math> defined by:</p> $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) \cdot z_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
<p>3 marks 1 mark</p>	<p>(a) Calculate <math>z_1</math> and <math>z_2</math>, then place in the complex plane the points <math>M_0, M_1, M_2</math> (graphical unit: 4 cm).</p> <p>(b) Let <math>r</math> be the sequence defined, for any natural number <math>n</math>, by <math>r_n =  z_n </math>. Show that the sequence <math>r</math> is geometric with commonality <math>\frac{\sqrt{2}}{4}</math>. Deduce an expression of <math>r_n</math> as a function of <math>n</math>.</p> <p>(c) We assume that for any natural number <math>n</math>, <math>z_n = r_n e^{\frac{i n \pi}{4}}</math>. Under what condition does the point <math>M_n</math> belong to the real axis?</p>
<p>2 marks</p>	<p>(d) Describe the precise position of the point <math>M_{10}</math> which represents <math>z_{10}</math> in the complex plane.</p>

Exercise 7

Calc. : ✓

The graphs below show the concentration of a drug in a patient's blood stream, with two different types of one-time injection — intra-veinous and oral — as a function of the time  $t$ , in minutes, over the interval  $[0, 20]$ .

The value 1 on the y-axis denotes the initial concentration at the time of the intra-veinous injection.



Use the graphs to answer questions 1. to 4. Give approximate values with the precision allowed by the graphs.

- 1 mark      1. Describe the variations of concentration after an intra-veinous injection.
- 1 mark      2. At what time does the oral injection reach its maximum concentration? What is then the value of that concentration?
- 2 marks     3. Give approximate values of the coordinates of the inflection point after an oral injection. What does it mean for the rate of change in the concentration at that moment?
- 2 marks     4. Over what interval of time it the concentration higher after an oral injection than it is after an intra-veinous injection?

Functions  $f$  and  $g$  that model these concentrations are defined by:

$$f(t) = e^{-0.17t} \quad \text{and} \quad g(t) = t \cdot e^{-0.3t-0.7}$$

- 3 marks     5. Explain the way in which function  $f$  models the intra-veinous injection and function  $g$  models oral injection.
- 2 marks     6. Use the calculator to find the times when the two concentrations are equal. Give approximate values to the thousandth.
- 2 marks     7. The area under the curve (AUC) of one of these functions gives the total exposure to the drug over a certain period. Compute that value over the first five minutes, for the two types of injections.  
Give a detailed answer, with all the steps in the computation.

**Exercise 8**

Calc. : ✓

In this exercise, all results will be rounded to 3 decimal places.

1. Here is the evolution of sales of electrically assisted bicycles in France between 2007 and 2017.

Year	2007	2009	2011	2013	2015	2017
Rank of the year $x_i$	0	2	4	6	8	10
Number of e-bikes sold (thousands): $n_i$	10	23	37	57	102	278

Data: Observatoire du Cycle

2 marks

- (a) Using the calculator, determine an affine adjustment of  $n$  in  $x$  for this data. Specify the correlation coefficient.

2 marks

- (b) We set  $y_i = \ln(n_i)$ . In this case, a affine adjustment of  $y$  in  $x$  is given by the formula  $y = 0.307x + 2.353$ , with a correlation coefficient approximately equal to 0.981. Use best-fit model to extrapolate bike sales of this type in 2023.

2. A company mass-produces power-assisted bicycles. Either  $X$  the random variable which, for each bike taken at random in the production associates its autonomy, in kilometres. We admit that this random variable  $X$  follows a normal law.

We know that  $P(X \geq 84) = 0.2266$  and  $P(X \leq 86) = 0.8943$ .

4 marks

Determine the mean and the standard deviation of this law. Round the results in km to the nearest integer.

3. In this part, it is considered that 4% of lithium-ion batteries have a defect and are described as “non-compliant”.

Let  $Y$  be the random variable which, for any batch of 150 batteries taken randomly in production, associates the number of batteries not compliant.

The production is large enough for us to be able to assimilate such a collection of 150 batteries in a draw with replacement.

2 marks

- (a) Determine  $P(Y \leq 5)$  by specifying the chosen model.

2 marks

- (b) Determine the probability that, in a random sample of 150 batteries, all batteries are compliant. Interpret the result.

**Exercise 9**

Calc. : ✓

	<p>Gabriella is playing with her remote-controlled toy car. The following equation describes the path of the car:</p> $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$ <p>The distance units are metres, and the time is in minutes.</p>
1 mark	1. Write down the initial position of the car.
1 mark	2. Calculate the position of the car after 15 seconds.
1 mark	3. Compute the speed of the car.
	<p>Grandma is watching Gabriela from point P(-1, -6)</p>
3 marks	4. Find the shortest distance from point P to the path of the car.
	<p>The edge of the cliff is at the point <math>\left(0, \frac{23}{3}\right)</math> and Grandma walks in that direction with velocity vector <math>\begin{pmatrix} 3 \\ 41 \end{pmatrix}</math>.</p>
2 marks	5. After how many minutes will the car reach the edge of the cliff?
4 marks	6. Will Grandma be able to catch the car before it falls down the cliff if she starts moving at the same time as the car? Explain your answer.

**Exercise 10**

Calc. : ✓

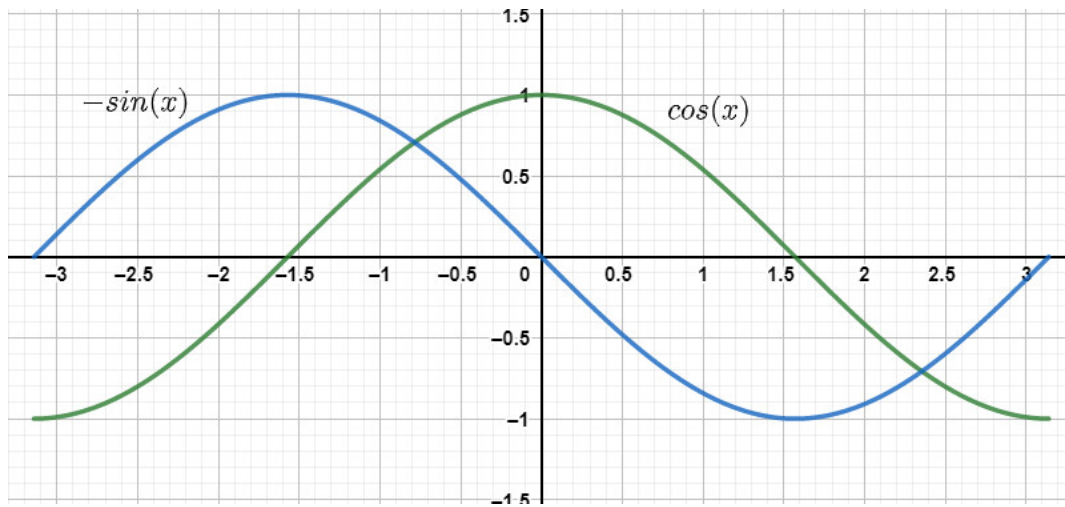
	<p>1. A contractor must carry out work for a public body. If they do not complete the work on time, they will have to pay a daily penalty: 100 on the first day, 110 on the second day, and so on with a daily increase of 10 a day.</p> <p>Let <math>u_n</math> be the penalty on the <math>n</math>-th day. Thus, the first term in sequence <math>u</math> is <math>u_1 = 100</math>.</p>
1 mark	(a) State the nature and characteristics of sequence $u$ .
1.5 marks	(b) Explain why $u_n = 90 + 10n$ for all values of integer $n$ .
1 mark	(c) On what day would the daily penalty amount to 220 ?
2.5 marks	(d) What total amount of penalty would the contractor have paid after 20 days of delay?
	<p>2. On another construction site, the penalty for delay is 80 on the first day and then increases by 10% each day. Let <math>v_n</math> be the amount of the penalty on day <math>n</math> in this case.</p>
1.5 marks	(a) Compute the values of the first three terms $v_1, v_2$ and $v_3$ .
1.5 marks	(b) Explain why $v_n = 80 \cdot 1.10^{n-1}$ for all values of integer $n$ .
2 marks	(c) What is the total amount of penalty the contractor would have paid after 20 days of delay?
3 marks	3. From which day onwards does the amount of the daily penalty in this case exceed that of the first case?



Exercise 11

Calc. : ✓

1. We consider the functions  $x \mapsto \cos x$  and  $x \mapsto -\sin x$  on  $[-\pi; \pi]$  and their graphic representations below:



Justify that the only solutions of the equation  $\cos x + \sin x = 0$  on  $[-\pi; \pi]$  are  $\frac{-\pi}{4}$  and  $\frac{3\pi}{4}$ .

2. Let  $f$  be the function defined on  $[-\pi; \pi]$  by:  $f(x) = e^x \cdot \sin x$

We note  $C_f$  its representative curve in a coordinate system.

- (a) Determine the variations of the function  $f$  on  $[-\pi; \pi]$ , specifying the abscissa, the value and the nature of each extremum.
- (b) Determine an equation of the tangent to the curve  $C_f$  at the point of abscissa  $\frac{\pi}{2}$ .
- (c) On what interval is  $C_f$  entirely above each of its tangents? To justify.
- (d) Using two successive integrations by parts, calculate the exact value of the integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx .$$

**Exercise 12**

Calc. : ✓

A company is conducting a study into the relationship between the experience and salary of their staff. The experience and salaries of 12 employees were tabulated.

Experience $x$ (years)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Salary $y$ (€)	4 200	4 800	4 600	5 000	5 200	5 600	5 650	5 660	5 500	6 000	5 831	6 200

1 mark

1. One of the following correlation coefficients fits these data. Which is it?

$$r_1 = 0.95, \quad r_2 = -0.95 \quad \text{or} \quad r_3 = 1?$$

Explain without referring to any computations.

2 marks

2. Compute the coordinates of the average point for these data, to the nearest integer.

2 marks

3. The equation of regression line with the method of the least squares is  $y = a + bx$ , where

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{and} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

Use the information given below to compute the values of coefficients  $a$  and  $b$ . Give answers to 2 decimal places.

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
0	-11	121
2	-9	81
4	-7	49
6	-5	25
8	-3	9
10	-1	1
12	1	1
14	3	9
16	5	25
18	7	49
20	9	81
22	11	121

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 45\,009$$

2 marks

4. Use the linear model  $f(x) = 78.7x + 4\,488$  to estimate the salary of an employee with 40 years of experience.

The salaries of the employees of this company are normally distributed with mean  $\mu = 5\,353$  and standard deviation  $\sigma = 553$ .

1.5 marks

5. Mr. Smith, an employee of this company, is paid 6 459 €. What proportion of the employees of this Company are paid less than Mr. Smith?

1.5 marks

6. Compute the probability that an employee's salary is greater than 7 636 € and comment your answer for question 5.

In another company, the salaries are normally distributed with standard deviation  $s = 620$ .

3 marks

7. Knowing that the probability that an employee's salary is greater than 5 000 € is approximately 0.107, find the mean salary in that company. Write your answer to the nearest whole number.