

Exercice 1

Calc. : ✓

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$.

partie a : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a : $f'(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$.
2. En déduire le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$ (les limites aux bornes ne sont pas demandées).
3. Justifier alors que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a : $\ln x < \sqrt{x}$.

partie b : Utilisation des théorèmes de comparaisons

1. Démontrer que, pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a : $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$.

On rappelle que la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.