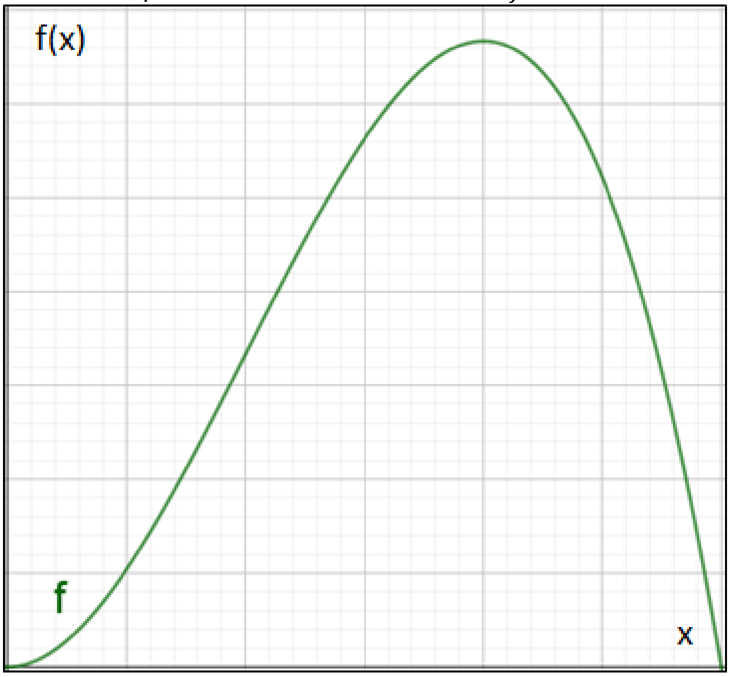
Réponses de la partie A

	Partie A	Points			
		CC	M	RP	I
1	Une petite élévation sur un terrain de jeu peut être modélisée par une fonction f avec $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$ pour $x > 0$ où x est la distance en mètres et $f(x)$ est la hauteur en mètres. On donne la courbe représentative de cette fonction f.  **Déterminer** la hauteur de cette élévation.				
	$f'(x) = -x^2 + 2x$	1	1		
	$f'(x) = 0$	1			
	$-x^2 + 2x = 0$				
	$x \cdot (-x + 2) = 0$				
	$x = 0 \text{ ou } -x + 2 = 0$				
	$x = 0 \text{ ou } x = 2$		1		
	$f(2) = -\frac{8}{3} + 4 = -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3} \approx 1.33$				
	La hauteur est d'environ 1,33 m.		1		
2	A la suite de plaintes concernant le repas de la cantine, le directeur affirme qu'au maximum 20 % des 2 500 élèves ne sont pas satisfaits du repas. Le comité des élèves pense qu'il s'agit de plus de 20 % des élèves. Il demande donc à un groupe de 40 élèves choisis au hasard de donner leur avis. a) **Expliquer** si un test à gauche ou à droite doit être utilisé pour vérifier cette hypothèse. Justifier la réponse. b) **Indiquer** l'hypothèse nulle H_0 qui pourrait être utilisée pour un test statistique et donner l'hypothèse alternative H_1. c) **Déterminer** la valeur critique k à l'aide du tableau suivant si le seuil de signification est fixé à 5 % et **interpréter** cette valeur.				

k	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(X \geq k)$	0.563	0.407	0.268	0.161	0.088	0.043	0.019	0.008

a. Un test unilatéral à droite est approprié car les élèves veulent montrer que p est plus élevé.	1	1		
b. $H_o: p \leq 0.2$ et $H_1: p > 0.2$	1			
c. $k = 13$ parce que $P(X = 12) > 0.05$ et $P(X = 13) < 0.05$ Cela signifie que si 13 étudiants ou plus ne sont pas satisfaits, il est prouvé que le directeur a tort.			1	1

3 Une petite chaîne de supermarchés emploie 900 personnes, dont 10 travaillent à la direction, mais un seul des directeurs est une femme. Les 809 autres femmes travaillent dans les magasins.
Montrer que l'obtention d'un poste à la direction de cette entreprise dépend du sexe.

Les informations données peuvent être mises dans un tableau de contingence pour reconstituer les valeurs manquantes.

D : direction
F : femme

	F	$\bar{F}$	
D	1	9	10
$\bar{D}$	809	81	890
	810	90	900

(marks: – | 1 | 1 | –)

La dépendance de ces deux événements peut être démontrée à l'aide de la formule.

$$P(F \cap D) = \frac{1}{900}$$

(marks: 1 | – | 1 | –)

$$P(F) \cdot P(D) = \frac{810}{900} \cdot \frac{10}{900} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{90} = \frac{1}{100}$$

(marks: – | 1 | – | –)

$$P(F \cap D) \neq P(F) \cdot P(D)$$

4 Un couple a besoin d'un test Covid négatif pour rendre visite à des amis à l'étranger. On sait que 20 % des tests donnent un résultat négatif, alors que la personne pourrait être infectée (résultat faussement négatif). La probabilité d'un résultat faussement positif est proche de zéro. On peut supposer que si l'un des deux est infecté, l'autre l'est aussi.
Expliquer pourquoi cette situation est un processus de Bernoulli et **montrer** que la probabilité d'un résultat faussement négatif tombe à 4 % lorsque les deux personnes sont testées.

Les deux tests sont indépendants. Il n'y a que deux résultats, le test peut être juste ou faux et la probabilité d'un résultat faux est la même dans chaque test.		3		
$P(X = 2) = B(2; 0{,}2; 2) = 0{,}2^2 = 0{,}04 = 4\%$	2			

5 Dans le diagramme ci-dessous, le nombre de nouveaux cas de COVID-19 en Allemagne est indiqué sur une période de trois semaines en octobre 2020. Pour prédire les chiffres dans le futur, deux types de modèles mathématiques fondamentaux peuvent être combinés.

	 **Indiquer** les noms de ces types de modèles et **justifier** la réponse. **Prévoir** une date dans le futur à laquelle un autre maximum sera atteint à supposer que les données continuent de suivre ces modèles.				
	Comme les chiffres oscillent avec une période de 7 jours, un modèle périodique peut être utilisé à petite échelle. Cependant, les nombres augmentent globalement à grande échelle. Pour modéliser cette évolution, un modèle exponentiel pourrait être utilisé, car ni les maxima ni les minima ne correspondent à une ligne droite. Le prochain maximum sera atteint le 24 octobre.	1	1	2	1
6	Le nombre de bactéries dans une boîte de Petri est étudié en laboratoire. Il s'avère que, dans des conditions définies, la croissance peut être modélisée par la fonction $$N(t) = 10\,000 \cdot e^{\ln(1{,}03)\cdot t},$$ où $N(t)$ est le nombre de bactéries après t jours. a) **Donner** le nombre de bactéries au début et le taux de croissance en pourcentage. b) **Calculer** le nombre de bactéries après le premier jour. c) **Expliquer** pourquoi ce modèle ne peut pas être utilisé sur une très grande échelle de temps.				
	a) L'expérience commence avec 10 000 bactéries. Par jour, le nombre augmente de 3%. b) $N(1) = 10\,000 \cdot 1{,}03 = 10\,000 + 300 = 10\,300$ c) À un certain stade, la boîte de Petri est pleine de bactéries et il n'y a plus d'espace ni de nourriture, de sorte que la croissance s'arrête.	2	2		1
7	**Indiquer** si l'affirmation est vraie ou fausse et **justifier la** réponse. Notez que les points ne sont attribués que si la réponse et la justification sont correctes. a) Si la température $T(x)$ augmente constamment, alors $T'(x) > 0$. b) Tous les modèles périodiques peuvent être modélisés par une fonction sinus. c) Il existe 9 possibilités différentes pour que trois élèves se tiennent les uns à côté des autres. d) Lorsqu'un dé est lancé une fois, la valeur moyenne attendue est de 3,5.				

	e) Si dix personnes sont choisies dans un très groupe de très grand effectif, le nombre de femmes peut être modélisé par une distribution binomiale, bien qu'une personne ne puisse être choisie plus d'une fois.				
	a) Vrai, car si la température augmente, le taux de variation en un point est positif et ce taux de variation (instantané) est donné par la dérivée.		1		
	b) Faux, car le feu rouge d'un feu de circulation est un modèle périodique. Mais le feu est soit allumé, soit éteint, sans aucune étape entre les deux, il ne peut donc pas être modélisé par une fonction sinus.	1			
	c) Faux, car cet exemple est sans répétition. Donc, en fait, il y a 3 ! = 6 possibilités.			1	
	d) Vrai, parce que $E(X) = (1+2+3+4+5+6):6 = 3{,}5$		1		
	e) Vrai, car la variation de la probabilité est plutôt faible lorsque l'on a affaire à un groupe de très grand effectif. De plus, si le choix est aléatoire, il ne peut y avoir que deux options parmi lesquelles choisir (homme et femme).		1		
8	La durée du jour $L(t)$ en heures à un endroit donné a été enregistrée sur une année. Elle peut être modélisée par la fonction $$L(t) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}t\right) + 12,$$ où t est le temps en jours. **Interpréter** le résultat de $\int_0^{365} L(t)dt$ et **expliquer** pourquoi ce résultat est égal à $12 \cdot 365 = 4380$.				
	Le nombre total d'heures de lumière du jour dans une année peut être calculé par l'intégrale de la fonction entre 0 et 365 : $$\int_0^{365} L(t).dt$$				1
	Puisque la fonction sinus est impaire, l'aire au-dessus de l'axe des abscisses a la même valeur que l'aire en-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle d'une période. Ainsi, l'intégrale serait égale à zéro. Puisque $L(t)$ est décalé de 12 unités vers le haut et que nous calculons l'aire de la surface en-dessous du graphique de L pour 365 jours, le résultat est : $12 \cdot 365 = 4\,380$. On peut également relever que les longues journées d'été sont contrebalancées par les longues périodes d'obscurité en hiver ; ainsi, la quantité totale peut être exprimée par $12 \cdot 365 = 4\,380$ heures.		1	3	
9	a) **Interpréter** ce que désigne l'espérance d'une variable aléatoire. b) X est une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ. **Indiquer** une probabilité tenant compte de ces deux valeurs caractéristiques μ et σ. c) Une variable aléatoire continue Y définie sur $\mathbb{R}$ est telle que $P(a \leq y \leq b) = \int_a^b f(z)dz$. **Expliquer** pourquoi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 1$.				

	a) L'espérance d'une variable aléatoire est la moyenne des valeurs que prend cette variable aléatoire pondérées par leurs probabilités. a. $P(\mu-\sigma \leq Y \leq \mu+\sigma) \approx 0{,}68$ ou $P(\mu-2\sigma \leq Y \leq \mu+2\sigma) \approx 0{,}95$ ou $P(\mu-3\sigma \leq Y \leq \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$ b) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz$ correspond à $P(-\infty < Z < +\infty)$, probabilité pour Y de prendre toutes les valeurs réelles possibles. Y désignant une variable aléatoire définie sur $\mathbb{R}$, cette probabilité est donc celle de l'événement certain, d'où la valeur 1.	2 1		1	1
10	Une nouvelle machine reconnaît le dopage dans le sang. Soit les deux événements suivants : • P = « le test est positif » • D = « le sportif était dopé » Après quelques tests, il a été constaté que sur 100 échantillons de sang de sportifs dopés, la machine en reconnaît 90. Cependant, elle donne également une mauvaise indication dans 5 % des cas lorsque l'échantillon est propre. On suppose qu'un sportif sur dix est dopé lors d'un événement donné. On souhaite connaître la probabilité qu'un sportif ait effectivement été dopé lorsque le test est positif. a) **Présenter** toutes les informations nécessaires avec des notations mathématiques correctes. b) **Utiliser** une méthode appropriée pour déterminer la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que le test est positif.				
	a) $P(P\|D) = 0{,}9$ $P(P\|\overline{D}) = 0{,}05$ $P(D) = 0{,}1$ b) Par exemple, avec le théorème de Bayes : $P(D\|P) = \frac{P(P\|D)\cdot P(D)}{P(P)} = \frac{P(P\|D)\cdot P(D)}{P(P\|D)\cdot P(D) + P(P\|\overline{D})\cdot P(\overline{D})}$ $= \frac{0{,}9\cdot 0{,}1}{0{,}9\cdot 0{,}1 + 0{,}05\cdot 0{,}9} = \frac{0{,}1}{0{,}15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ Un diagramme en arbre peut également être utilisé.	1	1 2	1	
	Total = 50	**14**	**21**	**9**	**6**