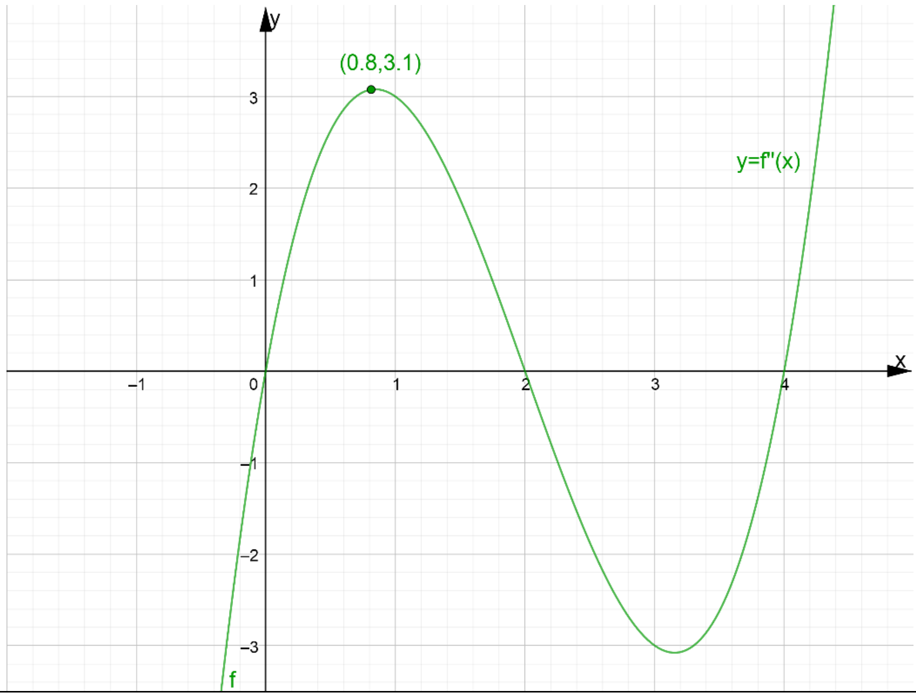
Réponses de la partie A

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Partie A</td><td colspan="4">Points</td></tr>
<tr><td>CC</td><td>M</td><td>RP</td><td>I</td></tr>
<tr><td>S1</td><td colspan="5">Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln(3x-2)$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en $x=1$.</td></tr>
<tr><td></td><td>$f(1)=0$
$f'(1)=3$
$0=3\cdot 1+b$
$b=-3$
$y=3x-3$</td><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">S2</td><td colspan="5">Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^2=3i$.
Donner les réponses sous la forme $z=re^{i\theta}$ où $\theta\in\,]-\pi,+\pi]$.</td></tr>
<tr><td>$z=(3i)^{\frac{1}{2}}=(3cis\left(\frac{\pi}{2}\right))^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{4}}$</td><td>3</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">S3</td><td colspan="5">Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ et f^{-1} la fonction réciproque de f.
Résoudre l'équation $f^{-1}(x)=2$.</td></tr>
<tr><td>Déterminez la fonction inverse :
$y=\frac{2x-1}{x-1}$
$y\cdot x-y=2x+1$
$y\cdot x-2x+1=y$
$x\cdot(y-2)=y-1$
$x=\frac{y-1}{y-2}$ puis on échange x et y : $y=f^{-1}(x)=\frac{x-1}{x-2}$
$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{x-2}=2$
$x-1=2x-4 \quad\Rightarrow\quad x=3$</td><td></td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>S4</td><td colspan="5">Une suite arithmétique strictement croissante (a_n) et une suite géométrique (b_n) ont le même premier terme $a_1=b_1=2$.
De plus, les deux suites (a_n) et (b_n) ont le même troisième terme $a_3=b_3$.
La somme des trois premiers termes de la suite arithmétique est supérieure de 4 à la somme des trois premiers termes de la suite géométrique.
Trouver l'expression du n-ième terme de chacune des suites (a_n) et de (b_n).</td></tr>
<tr><td></td><td>$a_1=b_1=2$
$a_3=b_3 \;\Leftrightarrow\; a_1+2d=b_1\cdot q^2 \;\Leftrightarrow\; 2+2d=2\cdot q^2 \quad |:2$
$1+d=q^2 \quad |-1$
$d=q^2-1 \quad (I)$
$s_{a,3}=s_{b,3}+4 \;\Leftrightarrow\; 3a_1+3d=b_1\left(1+q+q^2\right)+4$
$\Leftrightarrow\; 6+3d=2\left(1+q+q^2\right)+4 \quad |-4$
$2+3d=2+2q+2q^2 \quad (II)$
(I) en (II) :</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

	$2+3(q^2-1)=2+2q+q^2$ $2+3q^2-3=2+2q+q^2 \quad \vert -2-2q-2q^2$ $q^2-2q-3=0$ $q=1\pm\sqrt{1+3} \Rightarrow q_1=3, \qquad q_2=-1$ $\Rightarrow d_1=3^2-1=8, \qquad d_2=(-1)^2-1=0$ d_2 peut être exclue, car la suite (a_n) est strictement croissante par hypothèse. $\Rightarrow \begin{matrix}(a_n)=2+(n-1)\cdot 8=8n-6\\(b_n)=2\cdot 3^{n-1}\end{matrix}$				
S5	Une variable aléatoire continue X a une fonction de densité f donnée par : $$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ a\cdot e^{-ax} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$ On sait que : $P(X<1)=\frac{1}{2}$. **Montrer** que $a=\ln 2$.				
	$$\int_0^1 ae^{-ax}dx={}_0^1[-e^{-ax}]=-e^{-a}+1$$ $$-e^{-a}+1=\frac{1}{2}$$ $$e^{-a}=\frac{1}{2}$$ $$e^{a}=2$$ $$a=\ln(2)$$		2	3	
S6	Le graphique ci-dessous est celui de la dérivée seconde f'' d'une fonction. **Indiquer** lesquels des énoncés suivants sont vrais et lesquels sont faux. **Justifier** votre réponse. a) Le graphique de f est concave pour $-0{,}5<x<2$. b) Le graphique de f a un point d'inflexion en $x=0$. c) Si $f'(0)=0$, alors le graphique de f a un point d'inflexion avec une tangente horizontale en $x=0$. 				

	a) Faux. Pour $-0{,}5 < x < 2$, $f''(x)$ prend des valeurs supérieures et inférieures à zéro.			2	
	b) Vrai. f'' est égal à zéro en $x = 2$ et change de signe (en passant de valeurs positives à des valeurs négatives).		1	1	
	c) Vrai. Si $f'(0) = 0$, puisque $f''(0) = 0$ et que la dérivée seconde change de signe en $x = 0$, alors la courbe représentative admet en 0 un point d'inflexion à tangente horizontale.		2		
E1	Un fabricant de drones teste de nouveaux types de drones sur un terrain d'athlétisme local. Le drone A se déplace le long de la trajectoire donnée par l'équation : $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, t \geq 0$$ Le temps t est exprimé en secondes et la distance est mesurée en mètres. a) **Trouver** la position du drone A après 6 secondes. b) **Déterminer** le temps mis par le drone A pour atteindre le point de coordonnées $(25; 33; 60)$. c) **Calculer** la vitesse du drone A. **Donner** la réponse sous la forme la plus simple. d) Un observateur observe le drone A depuis le point de coordonnées $(13; 53; 0)$. **Calculer** la distance la plus courte entre le drone A et l'observateur, et l'heure à laquelle elle se produit. Le drone B décolle du point de coordonnées $(9; 11; 0)$ et se déplace à 7 m/s dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 3 \end{pmatrix}$. e) **Montrer** que l'équation décrivant la position du drone B est : $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, t \geq 0$$ f) **Trouver** le point où les trajectoires des drones A et B se croisent. g) **Préciser** si les drones vont entrer en collision à ce moment-là. **Justifier** la réponse.				
	a) $t = 6$, d'où les coordonnées $(28; 37; 72)$	1	1		
	b) $\begin{pmatrix} 25 \\ 33 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, t = 5$	1	1		
	c) $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ m/s		1	1	
	d) $\begin{pmatrix} -3 + 3t \\ -40 + 4t \\ 12t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$, d'où $t = 1$ et $\left\lVert \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 12 \end{pmatrix} \right\rVert = \sqrt{1440} = 12\sqrt{10}$		2	1	
	e) $\left\lVert \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rVert = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5$ Mais la vitesse du drone B est deux fois plus grande, donc le vecteur vitesse du drone B doit être $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.			1	1
	f) $\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + t_A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t_B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(13; 17; 12)$		2		

	g) Non, car : $t_A = 1\text{ s}$ et $t_B = 2\text{ s}$			2	
E2	Deux joueurs, A et B, lancent alternativement et indépendamment une pièce de monnaie non truquée. Le premier joueur qui obtient « face » gagne. Supposons que le joueur A lance la monnaie en premier. a) **Ecrire** la probabilité que A gagne lors du premier lancer. b) **Calculer** la probabilité que A gagne au troisième lancer. c) **Déterminer** la probabilité que A obtienne en premier « face ».				
	a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ c) Le joueur A peut gagner au premier, au troisième, au cinquième lancer. Donc : $P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\cdots$ $P(A)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots$ Nous obtenons la somme infinie des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $a_1=\frac{1}{2}$ et de raison $q=\frac{1}{4}$. D'où : $s_\infty=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$			3	2