Exercice 47 Calc. : ✗

	Un dé non pipé a ses faces marquées 1, 1, 2, 2, 3, 4. Un joueur lance ce dé deux fois et ajoute les nombres obtenus pour calculer son score final. Utilisez un tableau à double entrée ou toute autre méthode pour les questions suivantes :
2 points	1. Calculez la probabilité que le score final soit 3.
3 points	2. Sachant que le premier nombre obtenu était pair, calculez la probabilité que le score final soit pair.

1. On demande ici la probabilité de l'événement A : « le score final est 3 ». Voilà un tableau à double entrée répertoriant toutes les sommes différentes ; on a mis en rouge les issues qui correspondent à A :

Dé 1 \ Dé 2	1	1	2	2	3	4
1	2	2	3	3	4	5
1	2	2	3	3	4	5
2	3	3	4	4	5	6
2	3	3	4	4	5	6
3	4	4	5	5	6	6
4	4	4	5	5	6	6

On voit dans le tableau qu'on a 8 issues favorables sur 36 issues en tout, d'où $\boxed{P(\mathrm{A}) = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}}$.

2. Si on note B : « on a obtenu un nombre pair sur le premier dé » et C : « le score final est pair », alors on demande la probabilité $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})$. On a mis en vert les issues qui correspondent à B :

Dé 1 \ Dé 2	1	1	2	2	3	4
1	2	2	3	3	4	5
1	2	2	3	3	4	5
2	3	3	4	4	5	6
2	3	3	4	4	5	6
3	4	4	5	5	6	6
4	4	4	5	5	6	6

On voit dans le tableau que parmi ces 18 issues, il y en a 9 qui sont favorables, d'où $\boxed{P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C}) = \dfrac{9}{18} = \dfrac{1}{2}}$.

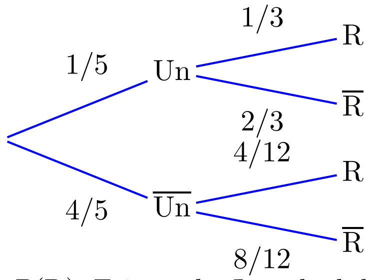
Exercice 40 Calc. : ✗

On considère le programme python ci-dessous.

```python
import random
a = random.randint(1,5)
if a == 1:
    b = random.randint(1,3)
    if b == 1:
        print("Rouge")
    else:
        print("Orange")
else:
    b = random.randint(1,12)
    if b > 8:
        print("Rouge")
    else:
        print("Orange")
```

Les événements « a=1 » et « Le programme affiche Rouge » sont-ils indépendants ?

Pour répondre à la question, dessinons un arbre de probabilités. L'expérience aléatoire est en deux étapes : première étape, on choisit un nombre aléatoire a dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et seconde étape, on choisit un second nombre aléatoire (les nombres dépendant du premier jet), et en fonction du second résultat on affiche Rouge ou Orange. On va noter Un : « le nombre a vaut 1 » et R : « le programme affiche Rouge ».



La méthode classique est de montrer que $P(\text{Un} \cap \text{R}) = P(\text{Un}) \times P(\text{R})$. Faisons-le. Le calcul de $P(\text{Un} \cap \text{R})$ donne $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$. Pour $P(\text{Un})$, cela fait $\frac{1}{5}$ (aucun calcul nécessaire), et pour $P(\text{R})$, le calcul donne $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. On trouve donc $P(\text{Un}) \times P(\text{R}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$, ce qui est la même chose que $P(\text{Un} \cap \text{R})$. On conclut que les deux événements sont indépendants.

Sinon ici, on pouvait voir sur l'arbre que quel que soit le nombre a, on a une probabilité de $\frac{1}{3}$ que le programme écrive Rouge (dans le second cas, sur les 12 nombres de 1 à 12, il y en a 4 qui sont strictement plus grands que 8, et $\frac{8}{12} = \frac{1}{3}$). Donc $P_{\text{Un}}(\text{R}) = P_{\overline{\text{Un}}}(\text{R})$, donc les deux événements sont indépendants.

Exercice 44 — Chez le médecin Objectif : Découvrir la spécificité et la sensibilité.

Après un test pour détecter une éventuelle allergie, son médecin convoque Tom pour lui annoncer que le test est positif. Pas de chance car ce type d'allergie ne touche que 0,1% de la population. Tom demande donc à son médecin si ce test est fiable. Il lui répond que, si vous êtes allergique, alors le test est positif dans 90% des cas, et que, si vous ne l'êtes pas, alors le test est négatif dans 97% des cas.

Quelle est la probabilité que Tom soit vraiment allergique ? On note M l'événement « être allergique » et T l'événement « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré de la situation.
2. Calculer la probabilité $P(\text{T})$.
3. En déduire la probabilité cherchée.
4. Conclure.
5. Pour voir autrement ce paradoxe, considérons une population de 10 000 personnes. Recopier et remplir le tableau suivant en arrondissant les valeurs à l'unité.

Allergique \ Test	T	$\overline{\text{T}}$	Total
M	Vrai positif	Faux négatif	Allergique
$\overline{\text{M}}$	Faux positif	Vrai négatif	Non allergique
Total	Test positif	Test négatif	10 000

6. Vérifier qu'on retrouve la probabilité cherchée.
7. La sensibilité d'un test est la probabilité que le test soit positif si la personne est allergique.
   (a) Déterminer une formule permettant de calculer la sensibilité à l'aide du tableau.

(b) Que se passe-t-il si la sensibilité d'un test augmente ?

(c) La calculer dans cet exemple.

8. La spécificité d'un test est la probabilité que le test soit négatif si la personne n'est pas allergique.

   (a) Déterminer une formule permettant de calculer la spécificité à l'aide du tableau.

   (b) Que dire si la spécificité d'un test augmente ?

   (c) La calculer dans cet exemple.

9. La sensibilité et la spécificité d'un test sont-elles dépendantes ? Comment réagissent-elles entre elles ?

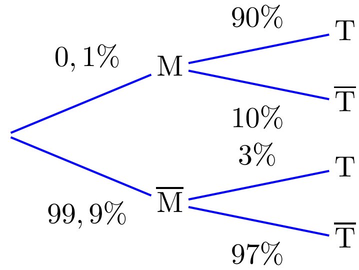
10. On appelle prévalence, notée p, la probabilité $P(\mathrm{M})$ et on note SE la sensibilité et SP la spécificité. La valeur prédictive positive (VPP) d'un test est la probabilité que la personne soit réellement allergique si son test est positif et la valeur prédictive négative (VPN) d'un test est la probabilité que la personne ne soit pas allergique si son test est négatif.

    (a) Donner les valeurs de VPP et VPN en fonction de p, SE et SP.

    (b) Les calculer dans cet exemple.

---

1. Voici l'arbre pondéré de la situation :



2. On calcule $P(\mathrm{T}) = P(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) + P(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T}) = 0,1\% \times 90\% + 99,9\% \times 3\% = \boxed{0,03087}$.

3. La probabilité cherchée est $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})$ car on sait que Tom a eu un test positif et on souhaite savoir la probabilité qu'il soit allergique. On calcule $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{P(\mathrm{T} \cap \mathrm{M})}{P(\mathrm{T})} = \dfrac{0,1\% \times 90\%}{0,03087} \approx \boxed{0,029}$ (c'est-à-dire $2,9\%$).

4. Le test, bien qu'il soit positif, n'est pas très concluant : Tom n'est pas du tout sûr d'être allergique !

5. Voici le tableau rempli. Sur 10 000 personnes, il y aura $0,1\% \times 10\ 000 = 10$ personnes allergiques. Parmi elles, 90% auront un test positif donc 9 personnes. Parmi les 9 990 autres, 97% auront un test négatif donc 9 690.

Allergique \ Test	T	$\overline{\mathrm{T}}$	Total
M	9	1	10
$\overline{\mathrm{M}}$	300	9 690	9 990
Total	309	9 691	10 000

6. Dans ce tableau, on calcule $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{9}{309} =\approx \boxed{0,029}$.

7. (a) La sensibilité vaut $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$.

   (b) Plus un test est sensible, moins il comporte de faux négatifs, et mieux il permet d'exclure la maladie.

   (c) Ici, on trouve $\dfrac{9}{10} = 0,9$.

8. (a) La spécificité vaut $P_{\overline{\mathrm{M}}}(\overline{\mathrm{T}})$.

   (b) Plus un test est spécifique, moins il occasionne de faux positifs, et mieux il permet d'affirmer la maladie.

   (c) Ici, on trouve $\dfrac{9\ 690}{9\ 990} \approx 0,97$.

9. Ces deux valeurs sont interdépendantes : l'augmentation de l'une se fait toujours au détriment de l'autre. (Cette information n'est pas déduisible de l'exercice, c'est de la culture générale pour vous).

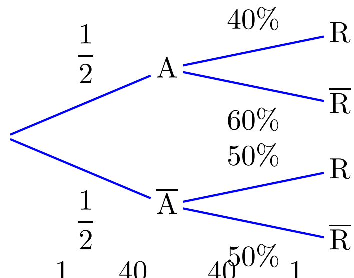
10. Le calcul de la question 2), refait dans la question 6), a permis de calculer $\mathrm{VPP} = P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) \approx 0,029$.

    Pour calculer VPN, il s'agit donc du calcul $\mathrm{VPN} = P_{\overline{\mathrm{T}}}(\overline{\mathrm{M}}) = \dfrac{9\ 690}{9\ 691} =\approx \boxed{0,9999}$.

Exercice 48 Calc. : ✗

	2 compagnies opèrent chacune le même nombre de vols en montgolfière. On sait que 40% des vols avec la compagnie A sont retardés au décollage et 50% des vols avec la compagnie B sont retardés.
1 point	1. **Représenter** la situation par un arbre pondéré : Un passager, ayant volé en montgolfière, est tiré au sort.
1 point	2. **Prouver** que la probabilité que le passager ait choisi la compagnie A et que son vol ait été retardé est de $\frac{1}{5} = 0,2$
2 points	3. **Prouver** que la probabilité que le vol du passager ait été retardé est de $\frac{9}{20} = 0,45$.
2 points	4. Sachant que le vol a été retardé, **calculer** la probabilité que le passager ait choisi la compagnie A.

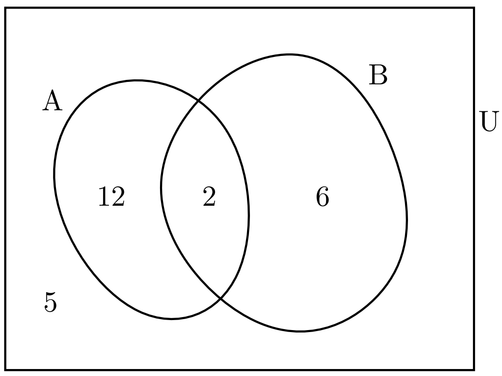
1. Dans l'arbre ci-contre, on note A : « le passager est dans une montgolfière de la compagnie A » et R : « le passager a subi un retard ». Puisque les compagnies A et B opèrent le même nombre de vols, on peut estimer $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$ (ce qui est correct si les vols ont toujours le même nombre de passagers).



2. On demande ici $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{R})$. Sur la branche du haut, on lit $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{R}) = \frac{1}{2} \times \frac{40}{100} = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$.
3. On demande ici $P(\mathrm{R})$. Cet événement est sur la branche du haut et la troisième branche, et sa probabilité est donc $P(\mathrm{R}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{R}) + P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{R}) = \frac{1}{2} \times \frac{40}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{50}{100} = \frac{40}{200} + \frac{50}{200} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20}$.
4. On demande ici $P_{\mathrm{R}}(\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{R})}{P(\mathrm{R})} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{5} \times \frac{20}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$.

Exercice 52 Calc. : ✓

	On choisit au hasard un élève dans une classe. Dans le diagramme suivant, l'événement U est l'univers. L'événement A est : « l'élève porte des lunettes ». L'événement B est : « l'élève a des yeux bleus ».
2 points	1. Calculez $P(\mathrm{B})$.
2 points	2. Calculez $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.
2 points	3. Calculez $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.
2 points	4. Calculez $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$.
2 points	5. Un élève aux yeux bleus sort de la classe. Quelle est la probabilité qu'il porte des lunettes ?



1. On voit dans le diagramme de Venn que l'univers est composé de $5+12+2+6 = 25$ élèves. L'événement B est composé de $2+6 = 8$ élèves. Ainsi, $\boxed{P(\mathrm{B}) = \frac{8}{25}}$.
2. Les élèves qui sont dans $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ sont les élèves qui sont dans la réunion des ensembles A et B. Il y a donc $12 + 2 + 6 = 20$. Ainsi, $P(\mathrm{B}) = \frac{20}{25} = \boxed{\frac{4}{5}}$.
3. Les élèves qui sont dans B sont $2 + 6 = 8$. Parmi eux, il y en a 2 qui sont également dans A. Ainsi, $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}$.
4. Les élèves qui sont dans $\overline{\mathrm{A}}$ sont $5 + 6 = 11$. Parmi eux, il y en a 6 qui sont également dans B. Ainsi, $\boxed{P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = \frac{6}{11}}$.
5. Ici on nous demande $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ donc c'est la même réponse qu'en 3).