

Chapitre 11.

Systèmes d'équations

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2023–2024



À tout moment dans le cours, on pourra se référer à la vidéo suivante (21 minutes) qui résume toutes les méthodes à savoir mettre en œuvre dans ce chapitre (le lien direct est disponible sur la page du cours <http://www.barsamian.am/2023-2024/S4P6/>, dans les ressources du chapitre 11) :

<https://www.youtube.com/watch?v=sWaHnxqUve0>

Thèmes abordés :

- résolution par substitution
- résolution par combinaisons linéaires
- résolution graphique

I/ Exemple de problème

À la pizzeria ce jeudi, toutes les pizzas étaient au même prix. Nous avons commandé quatre pizzas et deux cafés. Cela nous a coûté 38€. La table voisine a commandé cinq pizzas et quatre cafés. Leur addition était de 50,5€. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

À la pizzeria ce jeudi, toutes les pizzas étaient au même prix. Nous avons commandé quatre pizzas et deux cafés. Cela nous a coûté 38€. La table voisine a commandé cinq pizzas et quatre cafés. Leur addition était de 50,5€. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

- ❶ Choix des inconnues : p le prix d'une pizza, c le prix d'un café

À la pizzeria ce jeudi, toutes les pizzas étaient au même prix. Nous avons commandé quatre pizzas et deux cafés. Cela nous a coûté 38€. La table voisine a commandé cinq pizzas et quatre cafés. Leur addition était de 50,5€. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

- 1 Choix des inconnues : p le prix d'une pizza, c le prix d'un café
- 2 Mise en équations :

$$\begin{cases} 4p + 2c = 38 & \text{l'addition de notre table} \\ 5p + 4c = 50,5 & \text{celle de la table voisine} \end{cases}$$

À la pizzeria ce jeudi, toutes les pizzas étaient au même prix. Nous avons commandé quatre pizzas et deux cafés. Cela nous a coûté 38€. La table voisine a commandé cinq pizzas et quatre cafés. Leur addition était de 50,5€. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

- 1 Choix des inconnues : p le prix d'une pizza, c le prix d'un café
- 2 Mise en équations :

$$\begin{cases} 4p + 2c = 38 & \text{l'addition de notre table} \\ 5p + 4c = 50,5 & \text{celle de la table voisine} \end{cases}$$

- 3 Résoudre le système ! Cela donne $p = 8,5$ et $c = 2$.

À la pizzeria ce jeudi, toutes les pizzas étaient au même prix. Nous avons commandé quatre pizzas et deux cafés. Cela nous a coûté 38€. La table voisine a commandé cinq pizzas et quatre cafés. Leur addition était de 50,5€. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

- 1 Choix des inconnues : p le prix d'une pizza, c le prix d'un café
- 2 Mise en équations :

$$\begin{cases} 4p + 2c = 38 & \text{l'addition de notre table} \\ 5p + 4c = 50,5 & \text{celle de la table voisine} \end{cases}$$

- 3 Résoudre le système ! Cela donne $p = 8,5$ et $c = 2$.
- 4 Vérification de la solution.

Rappel du chapitre 9 : intersection de deux courbes de fonctions affines. Pour reprendre les notations habituelles, on va noter x le prix d'une pizza et y le prix d'un café.

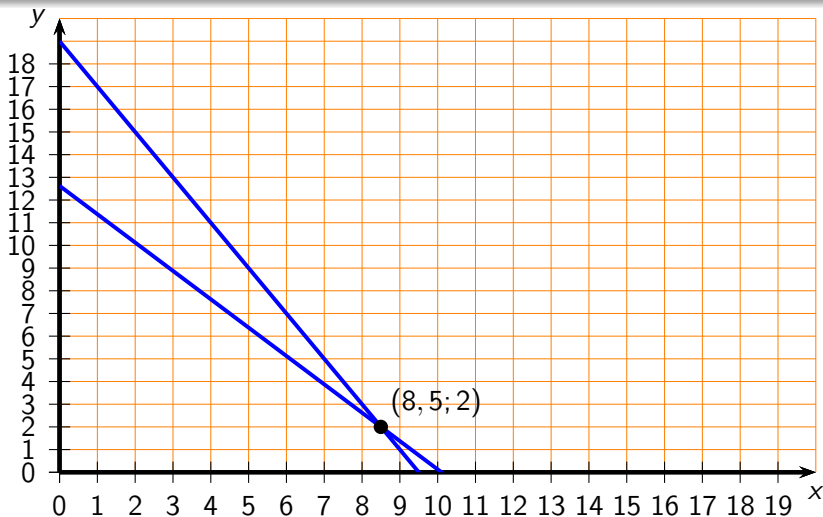
$$\begin{cases} 4x + 2y = 38 \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

Une équation de droite s'écrit $y = ax + b$, on va donc mettre les deux équations sous cette forme.

$$\begin{cases} 2y = -4x + 38 \\ 4y = -5x + 50,5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x + 19 \\ y = -1,25x + 12,625 \end{cases}$$

Ensuite on trace les droites et on regarde leur intersection...

II/ Résolution graphique



Tracer les courbes prend du temps, c'est un tracé approché, et les calculs peuvent être fastidieux (pour $y = -1,25x + 12,625$ notamment !). Il y a plus simple.

Que se passe-t-il quand on souhaite résoudre les deux problèmes suivants ?

Problème 1 : cette fois-ci, notre table a une addition de 25 euros pour deux pizzas et deux cafés, et nos voisins ont une addition de 50 euros pour quatre pizzas et quatre cafés.

Problème 2 : cette fois-ci, notre table a une addition de 20 euros pour deux pizzas et un café, et nos voisins ont une addition de 44 euros pour quatre pizzas et deux cafés.

III/ Méthode par substitution

Voici la méthode par substitution :

- 1 On s'arrange pour isoler l'une des deux variables dans l'une des lignes (ici y) :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 38 \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 38 - 4x \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y = 19 - 2x} \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

III/ Méthode par substitution

Voici la méthode par substitution :

- ❶ On s'arrange pour isoler l'une des deux variables dans l'une des lignes (ici y) :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 38 \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 38 - 4x \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y = 19 - 2x} \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

- ❷ On remplace cette variable dans l'autre équation et on résout :

$$\begin{cases} y = 19 - 2x \\ 5x + 4 \cdot (19 - 2x) = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - 2x \\ 5x + 76 - 8x = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - 2x \\ -3x + 76 = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - 2x \\ -3x = -25,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - 2x \\ \boxed{x = 8,5} \end{cases}$$

III/ Méthode par substitution

Voici la méthode par substitution :

- ❶ On s'arrange pour isoler l'une des deux variables dans l'une des lignes (ici y) :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 38 \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 38 - 4x \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y = 19 - 2x} \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

- ❷ On remplace cette variable dans l'autre équation et on résout :

$$\begin{cases} y = 19 - 2x \\ 5x + 4 \cdot (19 - 2x) = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - 2x \\ 5x + 76 - 8x = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - 2x \\ -3x + 76 = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - 2x \\ -3x = -25,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - 2x \\ \boxed{x = 8,5} \end{cases}$$

- ❸ On remplace cette valeur dans la première équation :

$$\begin{cases} y = 19 - 2x \\ x = 8,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - 2 \cdot 8,5 \\ x = 8,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y = 2} \\ x = 8,5 \end{cases}$$

IV/ Méthode par combinaison linéaire

Ici on numérote les lignes ($L1$ et $L2$) pour détailler les opérations.
Voici la méthode par combinaison :

IV/ Méthode par combinaison linéaire

Ici on numérote les lignes ($L1$ et $L2$) pour détailler les opérations.
Voici la méthode par combinaison :

- 1 On s'arrange pour mettre dans chaque ligne autant de fois l'une des deux variables (ici y) :

$$\begin{cases} (L1) & 4x + 2y = 38 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 \cdot L1) & 8x + 4y = 76 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

IV/ Méthode par combinaison linéaire

Ici on numérote les lignes ($L1$ et $L2$) pour détailler les opérations.
Voici la méthode par combinaison :

- ① On s'arrange pour mettre dans chaque ligne autant de fois l'une des deux variables (ici y) :

$$\begin{cases} (L1) & 4x + 2y = 38 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 \cdot L1) & 8x + 4y = 76 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

- ② On soustrait une ligne à l'autre pour faire disparaître cette variable, puis on résout :

$$\begin{cases} (L1 - L2) & 3x = 25,5 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L1) & x = 8,5 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

IV/ Méthode par combinaison linéaire

Ici on numérote les lignes ($L1$ et $L2$) pour détailler les opérations.
Voici la méthode par combinaison :

- ❶ On s'arrange pour mettre dans chaque ligne autant de fois l'une des deux variables (ici y) :

$$\begin{cases} (L1) & 4x + 2y = 38 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 \cdot L1) & 8x + 4y = 76 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

- ❷ On soustrait une ligne à l'autre pour faire disparaître cette variable, puis on résout :

$$\begin{cases} (L1 - L2) & 3x = 25,5 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L1) & x = 8,5 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

- ❸ Enfin on remplace dans l'autre équation :

$$\begin{cases} (L1) & x = 8,5 \\ (L2) & 5 \times 8,5 + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8,5 \\ 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8,5 \\ y = 2 \end{cases}$$