1 Identités remarquables et triangle de Pascal

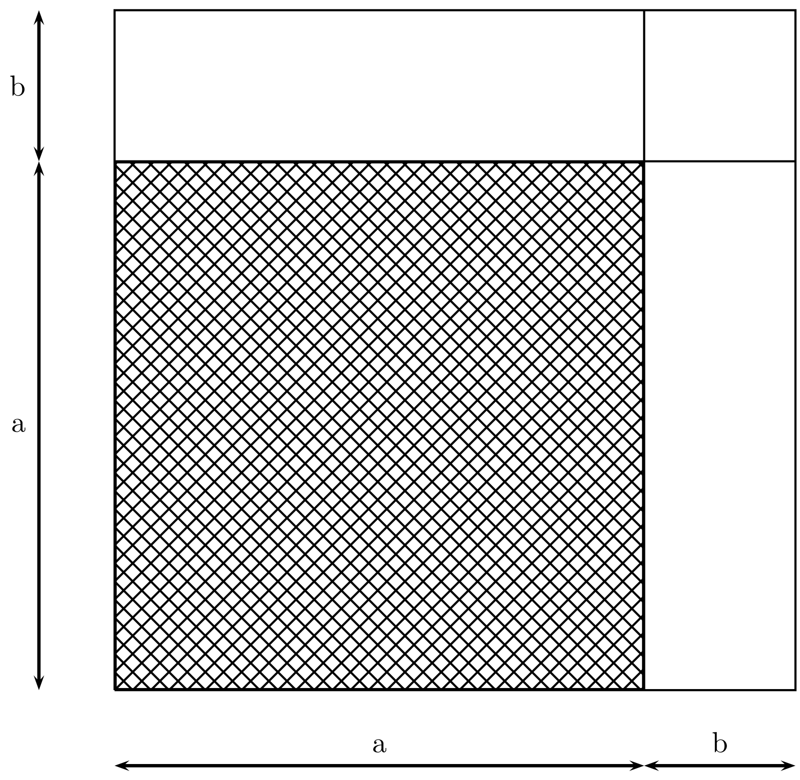
L'an dernier on a révisé les identités remarquables suivantes. Vous n'avez plus le droit de vous tromper sur ces formules !

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Il y a en fait des formules pour n'importe quelle puissance. Par exemple (pas à apprendre par coeur cette fois), on a les formules pour $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$:

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

On peut prouver géométriquement la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Dans le dessin suivant, l'aire du grand carré est bien sûr $(a+b)^2$. C'est aussi l'aire du carré hachuré a^2 plus l'aire du petit carré b^2 plus l'aire des deux rectangles $2ab$. Et voilà !



On peut de même prouver géométriquement l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, en considérant un cube de côté $a+b$ dans lequel on met contre un coin un plus petit cube de côté a.

Mais on va voir une méthode qui permet de trouver n'importe quelle identité remarquable, à n'importe quelle puissance. C'est le triangle de Pascal. L'idée géniale de Blaise Pascal (en 1655, et de plein d'autres gens avant lui en fait, on a retrouvé des manuscrits avec la même idée en Inde en 755, en Chine en 1303), c'est qu'on peut déduire l'écriture développée de $(a+b)^3$ à partir de l'écriture développée de $(a+b)^2$, on peut déduire l'écriture développée de $(a+b)^4$ à partir de l'écriture développée de $(a+b)^3$, etc.

Effectivement, $(a+b)^3$ peut se calculer comme $(a+b)^2 \times (a+b)$. Cela donne :

$(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2) \times (a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Le coefficient devant ab^2, par exemple (c'est 3), provient de $2ab \times b$ et de $b^2 \times a$. Du coup, c'est $2+1=3$. Si on note les termes de la forme développée de $(a+b)^4$ dans le même ordre (donc, d'abord a^4, puis a^3b, puis a^2b^2, puis ab^3, puis b^4, on ferait de même, etc. Au final, les coefficients qu'on va écrire vont former ce qu'on appelle le triangle de Pascal :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & \backslash & & / & & & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Cela se lit de la sorte :

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = 1 \times a + 1 \times b$
- $(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$
- $(a+b)^3 = 1 \times a^3 + 3 \times a^2b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3$
- $(a+b)^4 = 1 \times a^4 + 4 \times a^3b + 6 \times a^2b^2 + 4 \times ab^3 + 1 \times b^4$

Pour recalculer le triangle de Pascal, on démarre par un triangle dont on met des 1 sur le côté gauche et le côté droit. Ensuite, à chaque ligne, pour obtenir un nombre, on fait la somme des deux chiffres juste au-dessus. D'où les deux traits par exemple de 1 et 3 vers 4, qui montrent que le 4 vient de $1+3$.

On doit pouvoir être capable d'utiliser le triangle de Pascal pour trouver le développement du polynôme $(1+x)^n$. Par exemple pour $n=5$, on trouve :

$(x+1)^5 = 1 \times x^5 + 5 \times x^4 1 + 10 \times x^3 1^2 + 10 \times x^2 1^3 + 5 \times x 1^4 + 1 \times 1^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$

2 Divers calculs

Enfin, on doit pouvoir faire des calculs avec des fonctions polynomiales : images d'un nombre, addition, simplification d'expression, multiplication d'expressions, factorisations d'expressions... tout ce qui a déjà été travaillé en S3.

On doit aussi pouvoir être capable de résoudre des équations simples, de type $ax^2 + b = 0$ (cela donne $x^2 = \dfrac{-b}{a}$, on prend alors la racine carrée quand c'est possible), ou de type $ax^2 + bx = 0$ (factoriser par x ce qui donne $x(ax+b) = 0$ et on a donc $x = 0$ ou bien $x = \dfrac{-b}{a}$).

Enfin, il faut être capable de résoudre graphiquement (sur papier ou avec Geogebra ; l'an prochain avec une calculatrice graphique) n'importe quelle équation de type $ax^2 + bx + c = 0$ (avec la courbe de la fonction donc, comme aux chapitres 8 et 10).