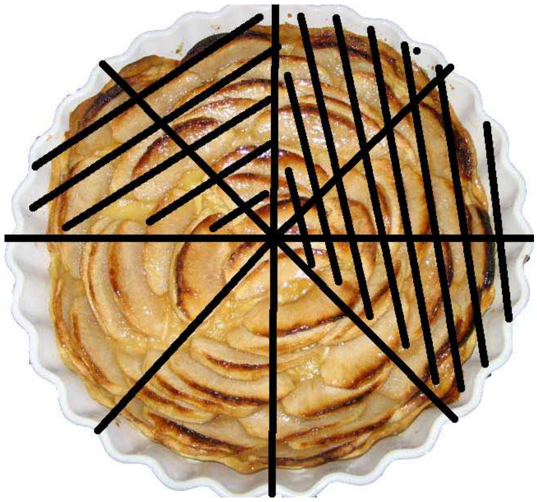
Manipulations sur les fractions — Rappels de S3

1 Addition de fractions avec même dénominateur



Prenons une tarte que l'on couperait en huit parts de taille égale. On parle alors de huitièmes, et pour représenter cela, on écrit le 8 au <u>dénominateur</u> de la fraction (le dénominateur, c'est celui qui dénomme). Si madame Lovelace décide de prendre 3 parts de tarte, elle prendra donc $\frac{3}{8}$ de tarte : on met le 3 au <u>numérateur</u> (le numérateur c'est celui qui donner le nombre).
Imaginons que madame Noether prenne à son tour 2 parts de tarte. Elle prend donc $\frac{2}{8}$ de la tarte. À elles deux, elles ont pris 5 morceaux de tarte : $\frac{5}{8}$ de la tarte.

Quand on additionne deux fractions qui ont le même dénominateur, on additionne donc les numérateurs. Il suffit de le prononcer à haute voix « trois huitièmes et deux huitièmes donnent cinq huitièmes », de la même manière que « trois bonbons et deux bonbons donnent cinq bonbons » : $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}}$

2 Égalité de fractions avec dénominateurs différents

Imaginons maintenant que l'on veuille couper notre gâteau pour un groupe de quatorze personnes. Il est alors insuffisant d'avoir des huitièmes de tarte, tout le monde ne pourrait pas en avoir un morceau ! On peut donc diviser chacun des huitièmes de tarte en deux morceaux de taille égale. On a donc affaire à des seizièmes de tarte, et chaque huitième de tarte a donné deux seizièmes de tarte : $\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$. On vient de voir que pour avoir deux quantités égales au niveau de la fraction, on a effectué la même multiplication au numérateur et au dénominateur : $\frac{1}{8}=\frac{1\times 2}{8\times 2}$. Cela fonctionne toujours : on peut multiplier « en haut et en bas » une fraction sans changer sa valeur : $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{k\times a}{k\times b}}$

Cette formule est utilisable dans les deux sens bien sûr, puisque c'est une égalité. Donc si on a « en haut et en bas » une multiplication par le même nombre, on peut simplifier en haut et en bas par ce nombre : $\boxed{\frac{\cancel{k}\times a}{\cancel{k}\times b}=\frac{a}{b}}$.

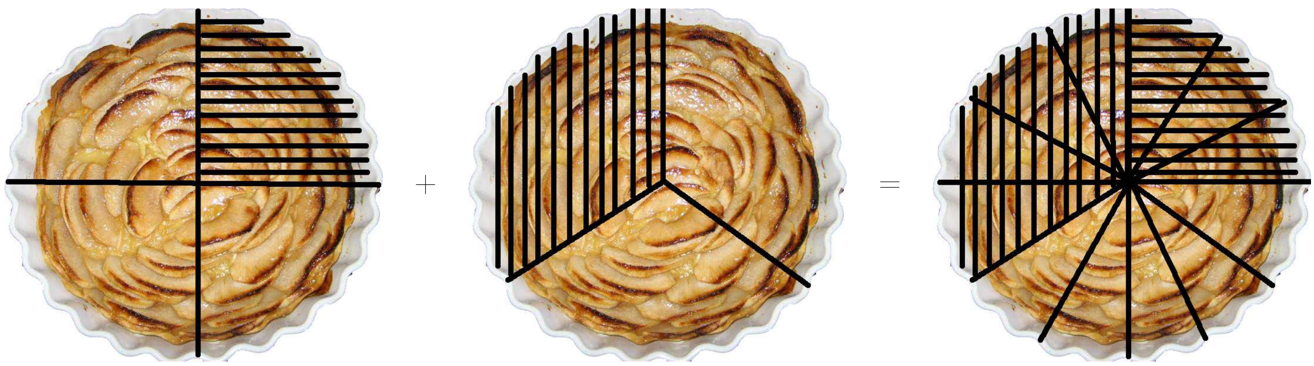
<u>Exemple :</u> $\frac{15}{50}=\frac{3\times \cancel{5}}{\cancel{5}\times 10}=\frac{3}{10}$.

3 Addition de fractions avec dénominateurs différents

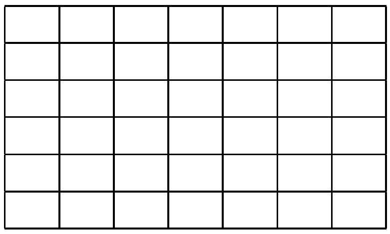
Parfois, on veut ajouter des fractions qui n'ont pas le même dénominateur. Par exemple, si madame Lovelace coupe sa tarte en quarts et que madame Noether coupe sa tarte en tiers, et que monsieur Barsamian décide de prendre une part de chaque tarte, on voudrait savoir quelle quantité de tarte il a pris en tout. Monsieur Barsamian a donc mangé $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ de tarte. On se souvient que l'on sait additionner deux fractions qui ont le même dénominateur, et que l'on peut, sans changer la valeur de la fraction, multiplier (ou diviser) en haut et en bas par le même nombre.

On va donc dans la première fraction multiplier « en haut et en bas » par 3 et dans la seconde par 4, pour se retrouver avec deux fractions en douzièmes.

Cela correspond au calcul suivant : $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} + \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$.



4 Multiplication de fractions



Enfin, on veut parfois prendre une certaine fraction d'une quantité elle-même écrite sous forme de fraction. Par exemple, madame Vaughan possède un verger rectangulaire dont les 4 lignes du haut sont plantées en pommiers (donc, $\frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$ du verger contient des pommiers) — le reste en poiriers. Les 4 premières colonnes du verger sont composés d'arbres fruitiers qui donnent des plus gros fruits (donc, $\frac{4}{7}$ du verger contient des arbres à gros fruits) — le reste en petits fruits.

On veut savoir quelle quantité du verger contient des pommiers à gros fruits : c'est donc $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$.

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les dénominateurs entre eux et les numérateurs entre eux : cela fait donc $\frac{2 \times 4}{3 \times 7} = \frac{8}{21}$ du verger total. Colorier le schéma pour s'en convaincre : $\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}}$.

Remarque : quand on veut multiplier une fraction par un nombre entier (par ex. $\frac{2}{7} \times 3$), on peut se rappeler que 3 c'est égal à $\frac{3}{1}$, donc cela donne $\frac{2 \times 3}{7 \times 1} = \frac{6}{7}$.

5 Division de fractions

Diviser par un nombre, c'est multiplier par son <u>inverse</u>. L'inverse d'un nombre x, c'est le nombre $\frac{1}{x}$, c'est le nombre qui fait que quand on multiplie x par son inverse, on obtient 1, c'est-à-dire $x \times \frac{1}{x} = 1$.

Quand on divise par une fraction, on peut donc multiplier par son inverse. Inverser une fraction revient à inverser numérateur et dénominateur. Du coup :

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}}.$$

<u>Exemple :</u> $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{1 \times 6}{2 \times 5} = \frac{1 \times \cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 5} = \frac{3}{5}$.