Chapitre 1.
Nombres

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2023–2024

Plan du chapitre

- Rappels
- Les nombres premiers
- La racine carrée

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, où :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$: les nombres entiers naturels
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$: les nombres entiers relatifs
- $\mathbb{D}$: les nombres décimaux
- $\mathbb{Q}$: les nombres rationnels (les fractions)
- $\mathbb{R}$: les nombres réels

Remarque : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ représente les nombres irrationnels. (ex. : π, $\sqrt{2}$)

Pour tous nombres a et b dans $\mathbb{N}$, $a+b \in \mathbb{N}$ et $a \times b \in \mathbb{N}$.

Mais. . . $2-5 \notin \mathbb{N}$: pour pouvoir soustraire, il faut $\mathbb{Z}$.

Tout nombre e dans $\mathbb{Z}$ a un <u>opposé</u> : c'est le nombre f tel que $e+f=0$. On le note $-e$.

Effectivement : $e+(-e)=e-e=0$.

<u>Remarque</u> : 0 n'a pas été choisi au hasard, c'est l'<u>élément neutre</u> de $+$, c'est-à-dire que $a+0=a$ (0 « ne sert à rien » dans une addition).

Propriétés intéressantes :

- $+$ est commutative ($a + b = b + a$) et associative ($(a + b) + c = a + (b + c)$)
- $\times$ (aussi notée $\cdot$) est également commutative et associative
- Ne fonctionne pas avec $-$: $2 - (3 - 5) \neq (2 - 3) - 5$.
- $+$ se distribue par rapport à $\times$:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (x - 1) \\ = \; & 3 \cdot x - 3 \cdot 1 && \text{On distribue.} \\ = \; & 3x - 3 && \text{On simplifie.} \end{aligned}$$

- Ordre « PEMDAS » : parenthèses, exposants, multiplications, divisions, additions, soustractions.

Définition : Nombre premier

Si $n \in \mathbb{N}$, on dit que n est un nombre premier si n a exactement deux diviseurs distincts : 1 et n.

Remarques : 0 n'est pas premier (il a une infinité de diviseurs).
1 n'est pas premier (dans son cas, 1 et n ne sont pas distincts).

Les premiers nombres premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, \dots$

Théorème (fondamental de l'arithmétique)

Si $n \geq 2$, alors n admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers (à l'ordre des facteurs près).

Ex. $75 = 3 \times 5^2 = 5 \times 3 \times 5$ (mêmes nombres premiers, seul l'ordre change).

> *Suppose, for example, that two 80-digit numbers p and q have been proved prime ; . . . Suppose further, that the cleaning lady gives p and q by mistake to the garbage collector, but that the product pq is saved. How to recover p and q ? It must be felt as a defeat for mathematics that, in these circumstances, the most promising approaches are searching the garbage dump and applying mnemo-hypnotic techniques.*
>
> *H. W. Lenstra, Jr., "Primality testing" (1982), (pp. 55–77)*

Définition : Plus grand commun diviseur (PGCD)

Si m, n sont dans $\mathbb{N}$, on appelle $pgcd(m, n)$ le plus grand nombre entier qui divise à la fois m et n.

Pour mettre sous forme irréductible une fraction $\frac{a}{b}$, il faut et il suffit de diviser en haut et en bas par $pgcd(a, b)$.

Quelques méthodes pour calculer $pgcd(a, b)$:

- écrire a et b selon tous les produits possibles
- décomposition en facteurs premiers de a et b
- algorithme d'Euclide

<u>Exemple :</u> calcul de $pgcd(21, 30)$.

Exemple : calcul de $pgcd(1\ 960, 143\ 374)$. On donne :

- $1\ 960 = 2^3 \times 5 \times 7^2$
- $143\ 374 = 2 \times 7^3 \times 11 \times 19$

Du coup :
$pgcd(2^3 \times 5 \times 7^2, 2 \times 7^3 \times 11 \times 19) = 2 \times 7^2$

On prend les nombres premiers qui apparaissent dans les décompositions des deux nombres, et on prend la plus petite puissance des deux.

Définition : Plus petit commun multiple (PPCM)

Si m, n sont dans $\mathbb{N}$, on appelle $ppcm(m, n)$ le plus petit nombre entier qui est multiple à la fois de m et de n.

Pour ajouter deux fractions de type $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, il suffit de mettre comme dénominateur commun $ppcm(b, d)$.

Quelques méthodes pour calculer $ppcm(a, b)$:

- calculer le $pgcd(a, b)$ puis utiliser le fait que $ppcm(a, b) = \dfrac{a \times b}{pgcd(a, b)}$.
- décomposition en facteurs premiers de a et b : on prend les nombres premiers qui apparaissent dans au moins l'une des deux décompositions, et on prend la plus grande puissance. Avec le même exemple, $ppcm(1\,960, 143\,374)$:

  $$ppcm(2^3 \times 5 \times 7^2, 2 \times 7^3 \times 11 \times 19) = 2^3 \times 5 \times 7^3 \times 11 \times 19$$

La racine carrée est l'opération réciproque à l'opération d'élévation au carré.

Se demander « quel est le nombre, qui, au carré, donne 25 ? » c'est exactement se demander « quelle est la racine carrée de 25 ? ». On peut donc écrire $5 = \sqrt{25}$ (ce symbole est la racine carrée).

Ce qu'on a vu est résumé dans la petite vidéo suivante (3 minutes 30) :

`https://www.lumni.fr/video/petits-contes-mathematiques-la-racine-carree`

1) Notion de racine carrée :

Définition : racine carrée

Soit $a \geq 0$. Le nombre positif qui, élevé au carré, donne a s'appelle la racine carrée de a. Ce nombre est noté $\sqrt{a}$.

Exemples :

- $5 = \sqrt{25}$
- $0,7 = \sqrt{0,49}$

Première propriété : puisque l'élévation au carré et la racine carrée sont deux opérations réciproques (pour des nombres positifs), on a donc :

Racine carrée et carré

Si a est un nombre positif, alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

⚠ Cela n'est vrai que quand a est positif ! Par exemple, le carré de -3 existe et vaut 9, mais la racine carrée de 9 est 3, pas -3.

Remarque : (hors programme) En règle générale, pour $a \in \mathbb{R}$ (positif ou négatif), $\sqrt{a^2} = |a|$ (la valeur absolue de a : c'est a si a est positif, $-a$ sinon).

Puisque le carré d'un nombre (réel) est toujours positif, un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée ! Par exemple, cela n'a pas de sens (à notre niveau) d'écrire $\sqrt{-1}$.

Racines carrées irrationnelles

Si a est un nombre entier qui n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{a}$ est irrationnel).

Exemple : 2 n'est pas un carré parfait donc $\sqrt{2}$ est irrationnel (ce n'est pas une fraction). Cela veut dire que son développement décimal n'est pas périodique : $\sqrt{2} \approx 1,414213562\dots$

Il n'existe donc pas de manière exacte d'écrire le nombre $\sqrt{2}$ avec un développement décimal. Quand on demande une valeur exacte d'un calcul où il y a $\sqrt{2}$, il faut donc laisser $\sqrt{2}$, et ne pas demander à la calculatrice de donner une valeur approchée.

III/ La racine carrée

Démonstration en classe : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ce qu'on peut aussi écrire $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

2) Calculs avec des racines carrées :

Produit de racines

Si a et b sont deux nombres positifs, alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Démonstration : on rappelle que $(xy)^2 = x^2y^2$, pour tous nombres x et y. Calculons maintenant :

- $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$ (d'après la définition).
- $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$ (d'après la propriété rappelée puis la définition).

On a donc deux nombres positifs dont les carrés sont égaux, c'est donc en fait le même nombre !

Pas de formule avec la racine d'une somme ! $\sqrt{a+b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. En revanche, pour le quotient :

Quotient de racines

Si a et b sont deux nombres positifs et $b \neq 0$, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration : on rappelle que $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \dfrac{x^2}{y^2}$, pour tous nombres x et $y \neq 0$. Calculons maintenant :

- $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$ (d'après la définition).
- $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \dfrac{a}{b}$ (d'après le rappel et la définition).

On a donc deux nombres positifs dont les carrés sont égaux, c'est donc en fait le même nombre !

3) Écritures simplifiées avec des racines carrées :

Écritures simples d'expressions avec des racines

Par convention, quand on demande de simplifier une expression avec des racines carrées :

- les radicandes (nombres sous la racine) doivent être des entiers les plus petits possible ;
- on s'arrange pour ne pas avoir de racines aux dénominateurs.

Exemples :

- $\sqrt{600} = \sqrt{100 \times 6} = \sqrt{100}\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$
- $\dfrac{3}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2 \times 5} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$
- $\dfrac{3}{1+\sqrt{2}} = \ldots$