Chapitre 2.
Triangles rectangles

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2023–2024

Introduction

Ce chapitre vient donner une intuition géométrique aux calculs sur les racines carrées :

- les triangles rectangles
- le théorème de Pythagore. . .
- . . . et sa réciproque

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle dont le diamètre est l'un des côtés. Alors, ce triangle est rectangle.

Démonstration : en classe.

Réciproquement, le cercle circonscrit a un triangle rectangle a pour diamètre le plus grand côté de ce triangle (appelé l'hypoténuse).

Le théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en A. On a alors l'égalité suivante :

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$$

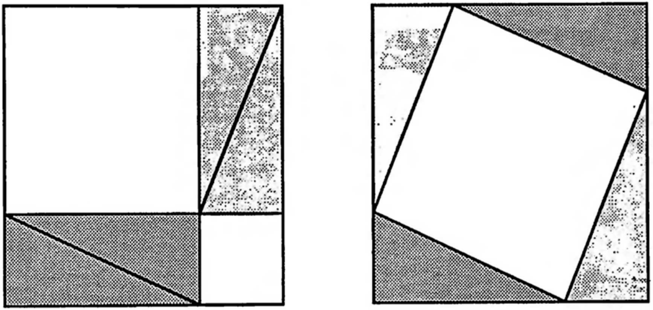
(le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés : si ABC est rectangle en A, l'hypoténuse est BC).

Démonstration(s) : Cf. diapositives suivantes. D'autres démonstrations : `http://www.barsamian.am/2023-2024/S4P6/Chap2_Preuves_Pythagore.pdf` [1]

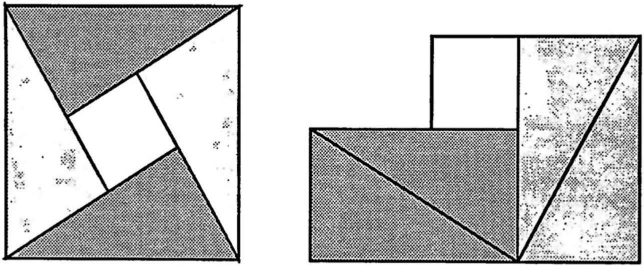
Pour trouver une longueur manquante dans un triangle rectangle, on commence par dire que le triangle est rectangle (et en quel point), puis on cite le théorème de Pythagore, et enfin on écrit l'égalité des carrés. Alors (et seulement alors) on calcule.

1. Source : R.B. Nelsen, “Proofs without words” (I, II et III).

II/ Le théorème de Pythagore (preuve 1)

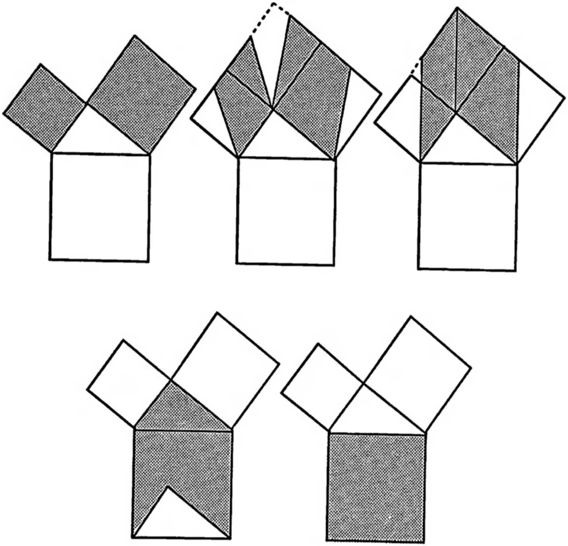


— *Classique mathématique du Gnomon des Zhou* (周髀算經), recueil anonyme, II^e siècle avant notre ère.



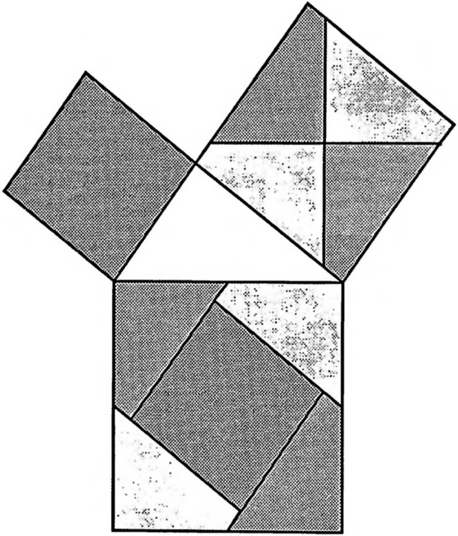
— Bhāskara (Bhāskarācārya), XII[e] siècle.

II/ Le théorème de Pythagore (preuve 3)



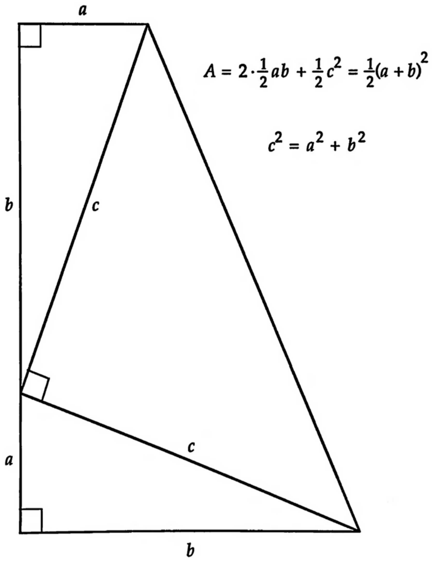
— *Éléments* (Στοιχεία), Euclide, III[e] siècle avant notre ère.

II/ Le théorème de Pythagore (preuve 4)



— H.E. Dudeney, 1917.

II/ Le théorème de Pythagore (preuve 5)



— J.A. Garfield (20e président des États-Unis d'Amérique), 1876.

Réciproque du théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle. Si on a l'égalité $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$, alors ce triangle est rectangle en A.

On peut donc cette fois, si on connaît les trois longueurs des côtés d'un triangle, savoir si ce triangle est rectangle ou non.

On commence donc par calculer le carré du plus grand côté, puis la somme des carrés des deux autres côtés, et s'il y a égalité on peut alors citer la réciproque du théorème de Pythagore, pour conclure que le triangle est rectangle.

Le théorème de Pythagore, sa contraposée, sa réciproque

- Sens direct : si c'est un triangle rectangle, alors le carré de l'hypoténuse vaut la somme des deux autres carrés.
- Contraposée : si le carré du plus long côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.
- Réciproque : si le carré du plus long côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Remarque : dans une implication de type $A \Rightarrow B$, la contraposée non$(B) \Rightarrow$ non(A) est toujours équivalente.

En revanche, la réciproque $B \Rightarrow A$ n'est pas toujours vraie. Exemple avec $A =$ « n est multiple de 10 » et $B =$ « n est pair ». Il se trouve que $A \Rightarrow B$ est vraie (un multiple de 10 est pair). Du coup, non$(B) \Rightarrow$ non(A) est toujours vraie aussi (un nombre impair ne peut pas être multiple de 10). En revanche, $B \Rightarrow A$ n'est pas vraie (si un nombre est pair, il n'est pas nécessairement multiple de 10).