Test n°1B du mardi 10/10/2023 (Calculatrice : ✗) Correction

Exercice 1 **4 points**

2 points	a) Décomposez les nombres suivants en produit de facteurs premiers : 550 et 198.
1 point	b) Simplifier la fraction suivante : $\dfrac{550}{198}$.
1 point	c) Donnez la décomposition en produit de facteurs premiers du ppcm de 550 et 198 (on ne demande pas de calculer ce nombre).

a) $550 = 55 \times 10$, et $55 = 5 \times 11$ et $10 = 2 \times 5$ ce qui donne donc $\boxed{550 = 2 \times 5^2 \times 11}$.
Idem pour $\boxed{198 = 2 \times 3^2 \times 11}$.

b) Du coup on peut écrire que $\dfrac{550}{198} = \dfrac{2 \times 5^2 \times 11}{2 \times 3^2 \times 11} = \dfrac{5^2}{3^2} = \boxed{\dfrac{25}{9}}$.

c) Pour le ppcm de 550 et 198, il faut garder chaque nombre premier qui apparaît dans l'une ou l'autre décomposition, et prendre la puissance la plus grande :
$\boxed{\text{ppcm}(440, 198) = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11}$.

Exercice 2 **4 points**

	L'unité choisie est le centimètre. On considère un rectangle ayant pour longueur $\sqrt{75}$ et pour largeur $\sqrt{48}$.
2 points	a) Déterminer le périmètre exact de ce rectangle. Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers relatifs et b le plus petit possible.
2 points	b) Calculer l'aire exacte du rectangle. Donner la réponse sous la forme la plus simple possible.

a) On peut commencer par écrire $\sqrt{75}$ et $\sqrt{48}$ plus simplement :
$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25}\ \sqrt{3} = \boxed{5\sqrt{3}}$; $\qquad \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16}\ \sqrt{3} = \boxed{4\sqrt{3}}$.
Le périmètre, c'est deux fois la longueur plus deux fois la largeur, donc en centimètres : $p = 2 \times 5\sqrt{3} + 2 \times 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$. Le périmètre est de $\boxed{18\sqrt{3}\text{ cm}}$.

b) L'aire, c'est la longueur fois la largeur, donc en centimètres carrés : $a = 5\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 5 \times 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 20 \times 3 = 60$. L'aire est de $\boxed{60\text{ cm}^2}$.

Exercice 3 **7 points**

2 points	a) Écrire $\sqrt{0,49}$ sous forme décimale.
3 points	b) Écrire $1,0\overline{2}$ sous forme de fraction (avec dénominateur et numérateur entiers).
2 points	c) Écrire $\dfrac{-5}{\sqrt{3}}$ avec un dénominateur entier.

a) $\sqrt{0,49} = \sqrt{10^{-2}}\sqrt{49} = 10^{-1} \times 7 = \boxed{0,7}$.

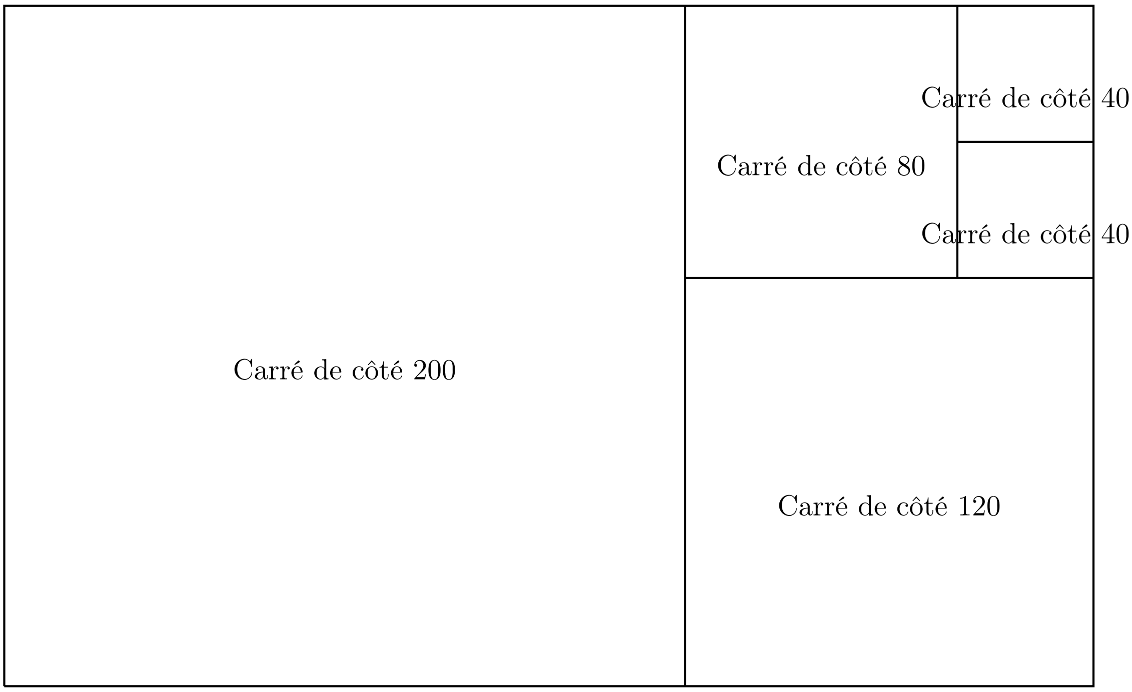
b) On commence par obtenir la fraction qui représente $0,0\overline{2}$. Pour cela, on écrit que :
$10 \times 0,0\overline{2} = 0,2\overline{2}$ et que donc, en enlevant $0,0\overline{2}$ de chaque côté, il vient que $9 \times 0,0\overline{2} = 0,2$. Du coup, $0,0\overline{2} = \dfrac{0,2}{9} = \dfrac{2}{90} = \dfrac{1}{45}$. Au final $1,0\overline{2} = 1 + \dfrac{1}{45} = \dfrac{45}{45} + \dfrac{1}{45} = \boxed{\dfrac{46}{45}}$.
On pouvait aussi écrire directement, en notant $x = 1,0\overline{2}$ que $100x = 102,\overline{2}$ et $10x = 10,\overline{2}$ du coup : $100x - 10x = 102,\overline{2} - 10,\overline{2}$, c'est-à-dire $90x = 92$, d'où le même résultat $x = \dfrac{92}{90}$ (sans simplifier).

c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}} = \dfrac{-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{-5\sqrt{3}}{3}}$.

Exercice 4 **2 points**

2 points	Je veux carreler un sol rectangulaire de taille 320 cm par 200 cm avec des carrelages carrés tous de même taille. Quelle est la taille maximale de carrelages que je puisse choisir ?

On peut remarquer que cela demande simplement de calculer $\text{pgcd}(320, 200) = 40$ donc les carrelages ont une taille de $\boxed{40\text{ cm}}$. Ou sinon, cela correspond au dessin suivant :



Exercice 5 **2 points**

2 points	Le nombre $\dfrac{2\sqrt{147}}{7\sqrt{3}}$ est un nombre entier. Justifier toutes les étapes du calcul suivant qui permet de l'affirmer. À chaque étape, on indiquera la formule utilisée. $$\frac{2\sqrt{147}}{7\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{49\times 3}}{7\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{49}\sqrt{3}}{7\sqrt{3}} = \frac{2\times 7\sqrt{3}}{7\sqrt{3}} = 2$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sqrt{147}}{7\sqrt{3}} && \\
= \ &\frac{2\sqrt{49\times 3}}{7\sqrt{3}} && \text{On reconnaît un carré parfait dans le radicande.} \\
= \ &\frac{2\sqrt{49}\sqrt{3}}{7\sqrt{3}} && \text{On utilise } \sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}. \\
= \ &\frac{2\times 7\sqrt{3}}{7\sqrt{3}} && \text{On simplifie la racine car } 49 = 7^2. \\
= \ &2 && \text{On simplifie en haut et en bas par } 7\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 6

BONUS	Expliquer si les affirmations suivantes sont vraies ou non. a) Il existe des nombres réels a et b pour lesquels $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. b) Pour tous les nombres réels a et b, $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

a) La phrase « Il existe des nombres réels a et b pour lesquels $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$. » est $\boxed{\text{vraie}}$. Effectivement, on peut prendre $a = 0$ et $b = 4$ par ex., et ça fonctionne. C'est une phrase qui est fausse en général, bien sûr, mais il y a des exceptions (quand a et/ou b vaut 0, donc).

b) La phrase « Pour tous les nombres réels a et b, $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$. » est $\boxed{\text{fausse}}$: si a et b sont tous les deux négatifs, alors $\sqrt{a\times b}$ existe (car $a\times b \geq 0$) mais ni $\sqrt{a}$ ni $\sqrt{b}$ n'existe donc leur produit n'a pas de sens. La formule est vrai seulement si a et b sont positifs, comme on l'a écrit dans le cours.