Exercice 3 des annales

1. $$\begin{aligned} & 2\sqrt{20} - 3\sqrt{45} \\ = \; & 2\sqrt{4 \times 5} - 3\sqrt{9 \times 5} \\ = \; & 2\sqrt{4}\sqrt{5} - 3\sqrt{9}\sqrt{5} \\ = \; & 2 \times 2\sqrt{5} - 3 \times 3\sqrt{5} \\ = \; & 4\sqrt{5} - 9\sqrt{5} \\ = \; & \boxed{-5\sqrt{5}} \end{aligned}$$
On reconnaît les carrés parfaits dans les radicandes.
On utilise $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
On simplifie les racines.
On calcule les multiplications.
On calcule la soustraction.

2. $$\begin{aligned} & \sqrt{8} - 4\sqrt{50} + 3\sqrt{18} \\ = \; & \sqrt{4 \times 2} - 4\sqrt{25 \times 2} + 3\sqrt{9 \times 2} \\ = \; & \sqrt{4}\sqrt{2} - 4\sqrt{25}\sqrt{2} + 3\sqrt{9}\sqrt{2} \\ = \; & 2\sqrt{2} - 4 \times 5\sqrt{2} + 3 \times 3\sqrt{2} \\ = \; & 2\sqrt{2} - 20\sqrt{2} + 9\sqrt{2} \\ = \; & \boxed{-9\sqrt{2}} \end{aligned}$$
On reconnaît les carrés parfaits dans les radicandes.
On utilise $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
On simplifie les racines.
On calcule les multiplications.
On calcule la soustraction.

Exercice 7 des annales

1. $\left(-\sqrt{100}\right)^2 = \sqrt{100}^2 = \boxed{100}$ (c'est la règle des signes, puis le fait que carré et racine carrée sont réciproques).
2. $\sqrt{0,000025} = \sqrt{\dfrac{25}{1\ 000\ 000}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{1\ 000\ 000}} = \dfrac{5}{1\ 000} = \boxed{0,005}$.

Exercice 8 des annales

1. $\sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = \sqrt{64}\ \sqrt{2} = \boxed{8\sqrt{2}}$.
2. $3\sqrt{500} = 3\sqrt{100 \times 5} = 3\sqrt{100}\sqrt{5} = 3 \times 10\sqrt{5} = \boxed{30\sqrt{5}}$.
3. $$\begin{aligned} & 2\sqrt{8} + 3\sqrt{128} - \sqrt{50} \\ = \; & 2\sqrt{4 \times 2} + 3\sqrt{64 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} \\ = \; & 2\sqrt{4}\sqrt{2} + 3\sqrt{64}\sqrt{2} - \sqrt{25}\sqrt{2} \\ = \; & 2 \times 2\sqrt{2} + 3 \times 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \\ = \; & 4\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \\ = \; & \boxed{23\sqrt{2}} \end{aligned}$$
On reconnaît les carrés parfaits dans les radicandes.
On utilise $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
On simplifie les racines.
On calcule les multiplications.
On calcule la soustraction.

Exercice 10 des annales

1. (a) Première méthode, avec la décomposition en facteurs premiers.

La décomposition en facteurs premiers de 63 :

- 63 n'est pas divisible par 2.
- 63 est divisible par 3, cela donne $63 = 3 \times 21$.
- 21 est divisible par 3, cela donne $21 = 3 \times 7$.
- Au final, $63 = 3 \times 3 \times 7 = 3^2 \times 7$.

La décomposition en facteurs premiers de 84 :

- 84 est divisible par 2, cela donne $84 = 2 \times 42$.
- 42 est divisible par 2, cela donne $42 = 2 \times 21$.
- $21 = 3 \times 7$ (on vient de le faire).
- Au final, $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$.

Maintenant pour le PGCD, on prend les nombres premiers qui apparaissent dans les décompositions des deux nombres, et on prend la plus petite puissance des deux.
Donc on ne prend pas le 2 (il n'est pas dans la décomposition de 63), on prend le 3 une fois (il est une fois dans 84 et deux fois dans 63) et le 7 une fois : $PGCD(63, 84) = 3 \times 7 = \boxed{21}$.
Pour le PPCM, on prend les nombres premiers qui apparaissent dans au moins l'une des deux décompositions, et on prend la plus grande puissance.
On prend le 2 deux fois, le 3 deux fois et le 7 une fois : $PPCM(63, 84) = 2^2 \times 3^2 \times 7 = \boxed{252}$.

(b) Autre méthode : trouver tous les diviseurs en écrivant toutes les décompositions :
$63 = 1 \times 63 = 3 \times 21 = 7 \times 9$ donc l'ensemble des diviseurs de 63 est $\{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$.
$84 = 2\times42 = 3\times28 = 4\times21 = 7\times12$ donc l'ensemble des diviseurs de 84 est $\{1, 2, 3, 4, 7, 21, 42, 84\}$.
Le plus grand nombre commun aux deux ensembles est bien 21.
On peut alors utiliser la formule $ppcm(a, b) = \dfrac{a \times b}{pgcd(a, b)}$, ce qui donne ici :
$ppcm(63, 84) = \dfrac{63 \times 84}{21} = 63 \times 4 = 252.$

2. Du coup $\dfrac{84}{63} = \dfrac{4 \times 21}{3 \times 21} = \boxed{\dfrac{4}{3} = 1,\overline{3}}$.

Exercice BONUS — Exercice 13 des annales

Pour enlever la racine de $\dfrac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$, la technique qu'on vient de découvrir en cours est de multiplier en haut et en bas par la « quantité conjuguée » du dénominateur, c'est-à-dire par $3-\sqrt{5}$. Cela permettra d'utiliser l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ qui fera donc disparaître la racine au dénominateur :

$$\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)} = \frac{6-2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{9-5} = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}.$$