

Les images ainsi que la citation d'introduction sont extraites de l'article wikipedia suivant : https://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_de_Pythagore

“ L'arbre de Pythagore est une fractale plane construite à l'aide de carrés. Elle porte le nom de Pythagore car chaque triplet de carrés en contact enclose un triangle rectangle, une configuration traditionnellement utilisée pour illustrer le théorème de Pythagore. ”

La figure 1 est un exemple de rendu “final” (en fait, il n'y a pas de fin) d'un arbre de Pythagore.

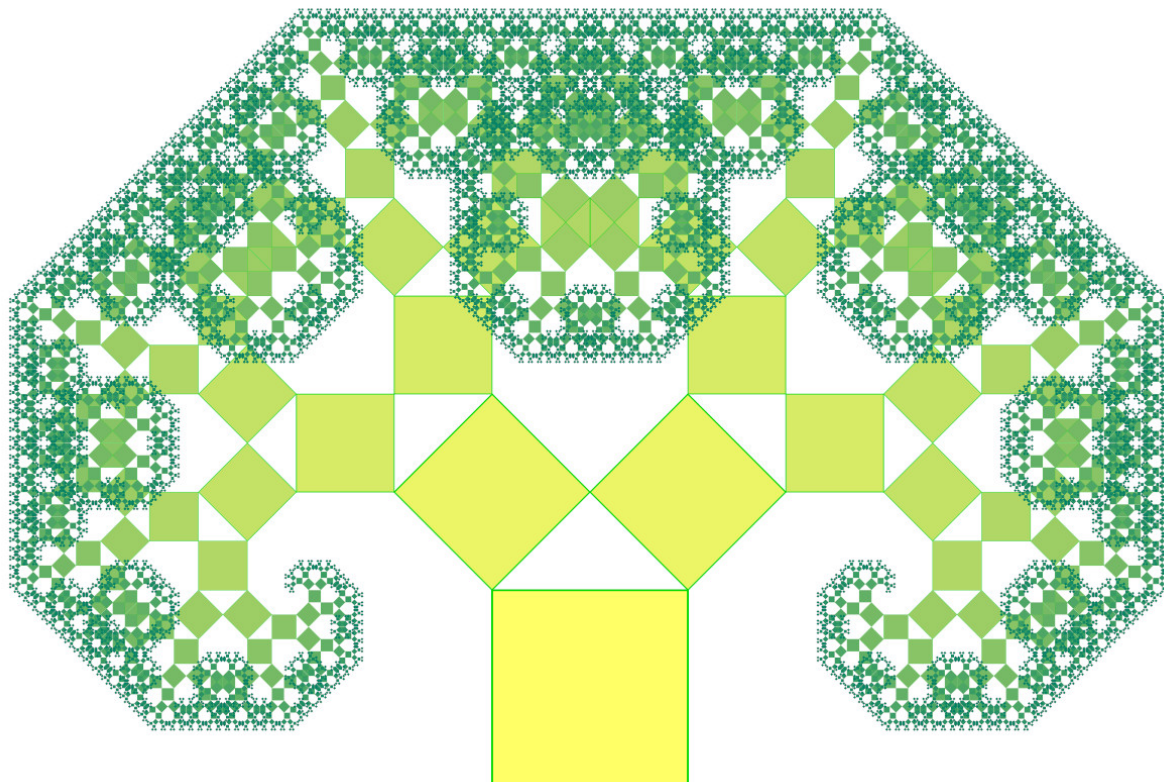


FIGURE 1 – Arbre de Pythagore avec 13 itérations.

Dans le travail d'aujourd'hui, nous allons essayer de refaire un dessin similaire, sur une feuille de papier A4. Je vous demanderai de commencer par un premier carré de côté 4 cm.

Les figures 2, 3, 4 et 5 montrent les 4 premières étapes de construction de l'arbre.



FIGURE 2 – Sans itération. FIGURE 3 – 1 itération. FIGURE 4 – 2 itérations. FIGURE 5 – 3 itérations.

Pour la production de l'arbre de Pythagore, vous devez tenir votre feuille en format “paysage”.

1. Démarrez l'arbre (figure 2) avec le premier carré de côté 4 cm : il doit se situer verticalement tout en bas de la feuille, horizontalement au milieu. Quelle est l'aire de ce premier carré ? Quel est son périmètre ?

Notre objectif va maintenant être de reproduire les étapes montrées dans les figures 2, 3, 4 et 5. À chaque étape, on donne l'algorithme de construction en haut de la page suivante.

Algorithme de création de l'arbre de Pythagore.

- 1 Pour chaque carré créé à l'itération précédente, faire
- 2 Identifier le côté supérieur du carré
- 3 Créer un triangle rectangle isocèle ayant pour hypoténuse ce côté
- 4 Pour chacun des deux autres côtés de ce triangle, faire
- 5 Créer un carré ayant pour base ce côté
- 6 Fin de la boucle
- 7 Fin de la boucle

Pour toutes les questions suivantes, on demande de donner des valeurs exactes pour les calculs demandés. Quand on peut simplifier les calculs, on demande de le faire (si le résultat est un entier, l'exprimer sous forme d'entier, s'il y a des racines, les exprimer avec des nombres aussi petits que possible sous la racine).

2. Dans cette question, on va reproduire la figure 3.
 - (a) Combien de nouveaux carrés sont créés ?
 - (b) Combien mesurent les côtés de ces nouveaux carrés ?
 - (c) Quelle est l'aire totale des nouveaux carrés créés ?
 - (d) Quel est le périmètre total des nouveaux carrés créés ?
3. Dans cette question, on va reproduire la figure 4. Reprendre les questions a)b)c)d) précédentes.
4. On va maintenant reproduire la figure 5. Reprendre les questions a)b)c)d) précédentes.
5. Sur le même schéma que précédemment, faire maintenant une itération supplémentaire et reprendre les questions a)b)c)d) précédentes.
6. Dans cette question, on s'intéresse à l'aire totale de la figure.
 - (a) Les questions 2 à 5 ont demandé de calculer à chaque fois l'aire rajoutée par différentes itérations. Mais quelle est, à chaque fois, l'aire totale de tous les carrés ? (donner donc l'aire du carré initial, puis l'aire totale après 1 itération, après 2 itérations, après 3, 4 puis 5 itérations).
 - (b) Que pouvez-vous conjecturer sur l'évolution de l'aire totale de la figure si on faisait n itérations ?
 - (c) Quelle serait alors l'aire totale de la figure si on faisait 40 itérations ? Vous devez trouver une aire supérieure à l'aire de votre feuille (quelle est l'aire de votre feuille ?) ; pourtant, je vous assure qu'on pourrait faire tenir l'arbre au bout de 40 itérations sur votre feuille. En examinant la figure 1, pouvez-vous expliquer pourquoi ?
7. Dans cette question, on s'intéresse au périmètre total de la figure.
 - (a) Les questions 2 à 5 ont demandé de calculer à chaque fois le périmètre rajouté par différentes itérations. Mais quelle est, à chaque fois, le périmètre total de tous les carrés ? (donner donc le périmètre du carré initial, puis le périmètre total de tous les carrés après 1 itération, après 2 itérations, après 3, 4 puis 5 itérations).
 - (b) Que pouvez-vous conjecturer sur l'évolution du périmètre total des carrés si on faisait n itérations ?