Afin de construire l'arbre de Pythagore, il faut bien lire l'algorithme de construction. Il s'agit, à chaque étape, de créer des triangles rectangles isocèles. J'ai réalisé la construction dans Geogebra, vous pouvez télécharger et ouvrir le fichier à l'adresse suivante, je donne une capture d'écran dans la figure 1 :

`http://www.barsamian.am/2023-2024/S4P6/TG5_Arbre_Pythagore.ggb`

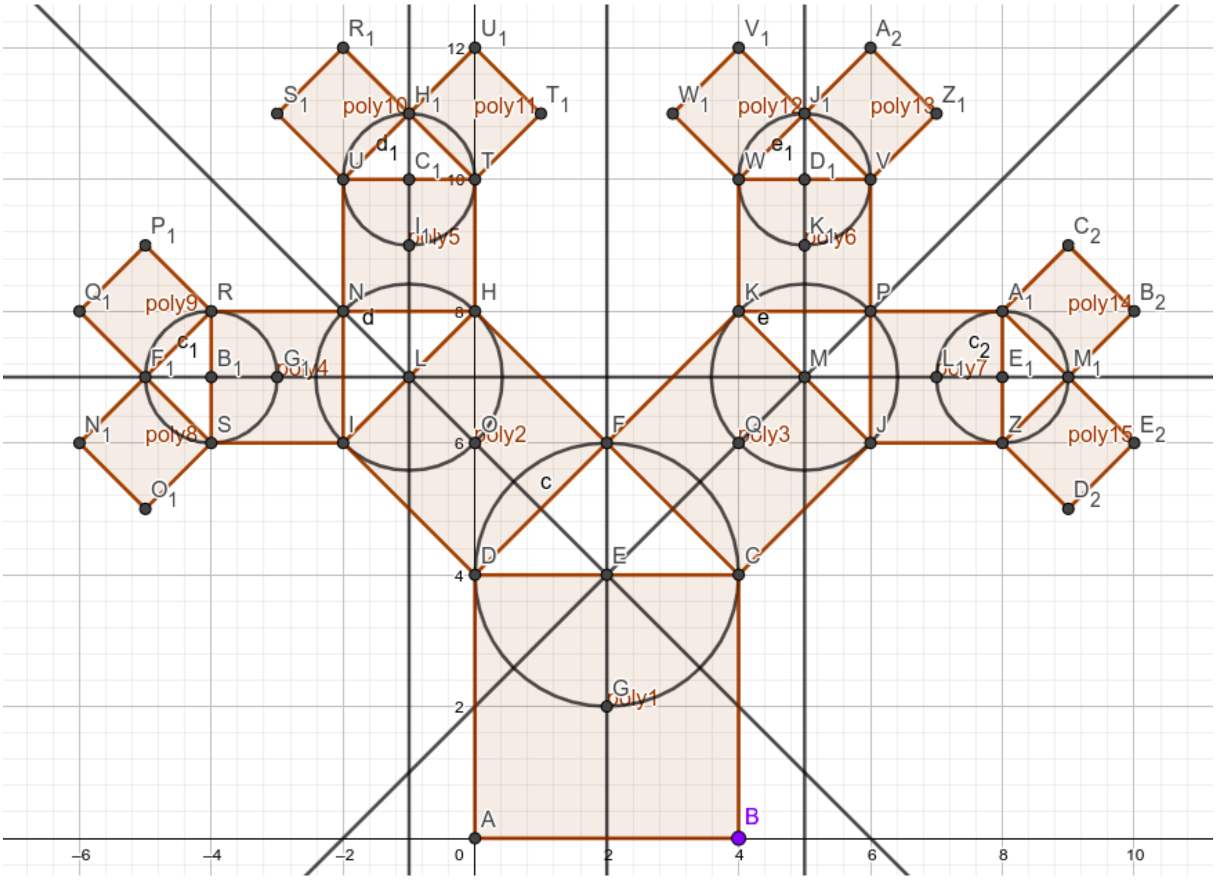

FIGURE 1 – Arbre de Pythagore avec 3 itérations réalisé dans Geogebra.

Voici la procédure, que vous pouvez continuer par ex. en N_1O_1. Cette procédure utilise le fait qu'un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse a son 3e point sur le cercle de diamètre l'hypoténuse, et que dans un triangle isocèle, la médiatrice du 3e côté est aussi une hauteur :

- Création du cercle : on va créer le cercle de diamètre N_1O_1. Pour cela, créer le milieu de $[N_1O_1]$ (2e menu), puis créer le cercle avec "centre, point" (6e menu) et choisir le milieu de $[N_1O_1]$ (comme centre) puis N_1 (comme point du cercle).
- Création de la hauteur : on va créer la hauteur du triangle à construire, qui est la médiatrice de $[N_1O_1]$. Pour cela, il suffit de choisir "Droite perpendiculaire" (4e menu), puis cliquer sur le milieu de $[N_1O_1]$, et cliquer sur le segment $[N_1O_1]$.
- Création du 3e point du triangle : pour cela, il suffit de créer le point d'intersection (2e menu) entre le cercle et la droite qu'on vient de créer.
- Création des deux carrés posés sur ce triangle : pour cela, créer un polygone régulier (5e menu) et cliquer sur les deux points de la base du carré (attention à l'ordre, il faut cliquer sur celui le plus à gauche, puis celui le plus à droite).

Voici maintenant le détail des calculs :

1. Le carré de base a pour côté 4 cm, donc son aire est 16 cm^2 et son périmètre 16 cm.
2. Pour les carrés créés à la première itération : on crée un triangle isocèle d'hypoténuse 4 cm. En appliquant le théorème de Pythagore (dans le triangle CDF rectangle en F de la la figure 1), en appelant $x = \text{DF} = \text{FC}$, on trouve que $4^2 = x^2 + x^2$. On résout, on trouve $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   Du coup, l'aire de ce carré vaut $\sqrt{8}^2$ c'est-à-dire 8 cm^2 et le périmètre vaut, en cm, $4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.
   On a créé 2 carrés similaires, donc l'aire totale rajoutée est 16 cm^2 et le périmètre total rajouté $16\sqrt{2}$ cm.

3. Pour les carrés créés à la seconde itération, c'est le même principe. On applique le théorème de Pythagore dans INH, on trouve IN $= 2$ cm.

   Comme on a créé 4 nouveaux carrés, l'aire totale rajoutée vaut, en cm^2, $4 \times 4 = 16$ et le périmètre total rajouté vaut, en cm, $4 \times 4 \times 2 = 32$.

4. Pour les carrés créés à la troisième itération, c'est le même principe. On applique le théorème de Pythagore dans $\mathrm{F_1SR}$, on trouve $\mathrm{F_1S} = \sqrt{2}$ cm.

   Comme on a créé 8 nouveaux carrés, l'aire totale rajoutée vaut, en cm^2, $8 \times 2 = 16$ et le périmètre total rajouté vaut, en cm, $8 \times 4 \times \sqrt{2} = 32\sqrt{2}$.

5. Pour les carrés créés à la quatrième itération, c'est le même principe. On applique le théorème de Pythagore, on trouve que la nouvelle longueur des côtés est 1 cm.

   Comme on a créé 16 nouveaux carrés, l'aire totale rajoutée vaut, en cm^2, $16 \times 1 = 16$ et le périmètre total rajouté vaut, en cm, $16 \times 4 \times 1 = 64$.

6. (a) À chaque itération, on rajoute 16 cm^2. Du coup, l'aire totale de tous les carrés est : 16 cm^2 au départ ; 32 cm^2 au bout d'une itération ; 48 cm^2 au bout de deux itérations ; 64 cm^2 au bout de 3 itérations ; 80 cm^2 au bout de quatre itérations.

   (b) Finalement au bout de n itérations, on a fait 16 cm^2 + 16 cm^2 + ... + 16 cm^2 ($n + 1$ termes dans la somme), d'où une aire totale de $(n + 1) \times 16$ cm^2.

   (c) Après 40 itérations, on arriverait donc à 656 cm^2. C'est plus que l'aire de la feuille, car la feuille a une aire, en cm^2, de $21 \times 29,7 = 623,7$. En examinant la figure 1, on voit qu'au bout d'un certain temps, les carrés se recouvrent les uns les autres, ce qui explique qu'il est possible de continuer la construction de l'arbre, et que ça ne dépasse pas de la feuille.

7. (a) Le périmètre initial est de 16 cm. Ensuite on rajoute $16\sqrt{2}$ cm pour un total de $16 + 16\sqrt{2}$ cm à l'itération 1. Ensuite on rajoute 32 cm pour un total de $48 + 16\sqrt{2}$ cm à l'itération 2. Ensuite on rajoute $32\sqrt{2}$ cm pour un total de $48 + 48\sqrt{2}$ cm à l'itération 3. Ensuite on rajoute 64 cm pour un total de $112 + 48\sqrt{2}$ cm à l'itération 4.

   (b) Ici c'est un peu plus compliqué, la formule est plus dure à voir.

   Peut-être avez-vous vu que si on note $a + b\sqrt{2}$ le périmètre total, alors une fois sur deux on change a, une fois sur deux on change b (et la formule est à peu près similaire à la question précédente).

   Peut-être avez-vous vu qu'à chaque étape le côté du carré est divisé par $\sqrt{2}$, ce qui fait qu'à l'itération n, on aboutit à 2^n carrés de côté $4 \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

   Dans tous les cas, la formule exacte n'est pas l'important, l'important est d'avoir réfléchi.