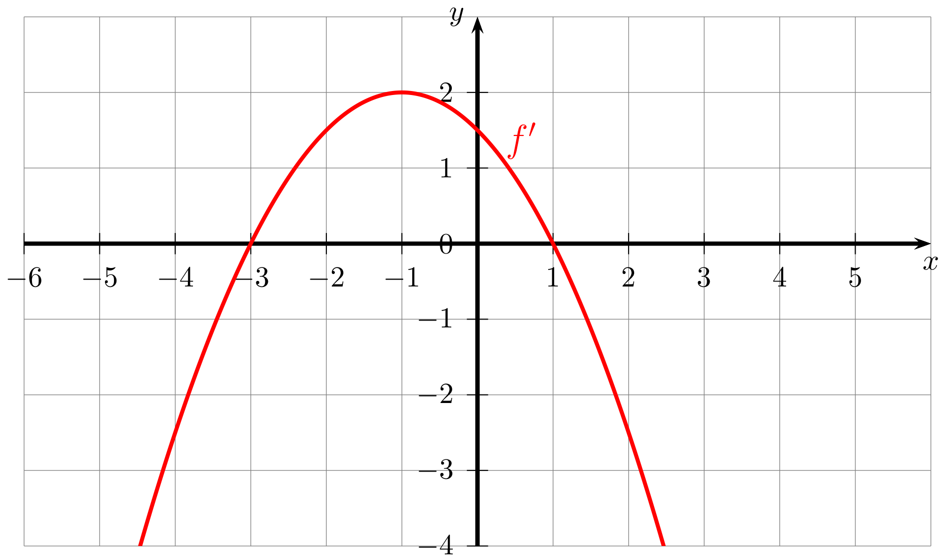
Exercice 7 **5 points**

Le diagramme ci-dessous montre le graphique de la dérivée f' d'une fonction f. 5 points



a) **Déterminer** les intervalles sur lesquels la fonction f est décroissante ou croissante.

b) **Déterminez** si la fonction f comporte des extremums. Dans l'affirmative, **déterminez** leur nature. **Justifiez** vos réponses.

a) On lit graphiquement le signe de f' pour en déduire les variations de f. Là où la courbe de f' est en-dessous de l'axe des abscisses, $f' < 0$ (signe « $-$ ») donc f est décroissante, là où la courbe de f' est au-dessus de l'axe des abscisses, $f' > 0$ (signe « $+$ ») donc f est croissante.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Var $f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, le tableau de variations nous permet de lire que :

- f est décroissante sur $\boxed{]-\infty;-3]}$ et sur $\boxed{[1;+\infty[}$;
- f est croissante sur $\boxed{[-3;1]}$.

b) Ainsi f a deux extremums : un $\boxed{\text{minimum}}$ (local) à l'abscisse $\boxed{-3}$ (f est décroissante juste avant puis croissante) et un $\boxed{\text{maximum}}$ (local) à l'abscisse $\boxed{1}$ (f est croissante juste avant puis décroissante).

Exercice 46 **5 points**

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 7x + 3$.
Déterminer la primitive F de f telle que $F(2) = 5$. 5 points

Ici on commence par trouver toutes les primitives :

$f(x) = x^2 - 7 \times x + 3 \times 1.$

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 7 \times \dfrac{x^2}{2} + 3 \times x.$

$\boxed{F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 7\dfrac{x^2}{2} + 3x + k}.$

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

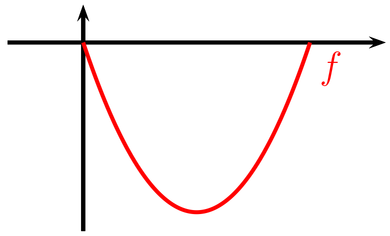
3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante k.

Maintenant, il faut que F vérifie la condition $F(2) = 5$:

$$\begin{aligned}
F(2) &= 5 && \\
\frac{2^3}{3} - 7\frac{2^2}{2} + 3 \times 2 + k &= 5 && \text{On utilise l'expression de } F \\
\frac{8}{3} - 14 + 6 + k &= 5 && \text{On calcule} \\
\frac{8}{3} - 8 + k &= 5 && \text{On simplifie} \\
k &= 13 - \frac{8}{3} && +8 - \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

On peut maintenant simplifier $k = 13 - \frac{8}{3} = \frac{39}{3} - \frac{8}{3} = \frac{31}{3}$, ainsi la primitive cherchée est la fonction $\boxed{F(x) = \frac{x^3}{3} - 7\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{31}{3}}$.

Exercice 8 **5 points**

Jim creuse un trou dans le jardin pour construire une piscine. Aujourd'hui il pleut, il est donc assis à l'intérieur de ce trou et se demande quelle est la profondeur de celui-ci. Il veut que le trou fasse au moins 2 mètres de profondeur. Il sait que la profondeur du trou peut être modélisée par la fonction suivante : $f(x) = x^2 - 3x$  **Déterminez** si le trou est suffisamment profond. **Justifiez** votre réponse en **calculant** la profondeur du trou que Jim a déjà creusé.	5 points

Pour cet exercice, on cherche la valeur minimale de la fonction f (on veut savoir si le trou a une profondeur d'au moins 2 mètres, on veut donc s'assurer que le minimum de f est inférieur ou égal à -2 (la profondeur donne une valeur négative pour la fonction f). Pour ce faire, on a (au moins) deux manières d'opérer :

- la première manière est la manière qui fonctionnera quelle que soit la fonction qu'on vous donne : on cherche le minimum de la fonction, donc il suffit d'étudier ses variations. Pour cela, il suffit de dériver et d'étudier le signe de la dérivée. Comme à l'exercice 2.

  On calcule la dérivée :

  $f(x) = x^2 - 3 \times x.$

  $f'(x) = 2x - 3 \times 1.$

  $\boxed{f'(x) = 2x - 3}$.

  f' est une fonction du 1er degré. Pour trouver là où f' est positive, on peut résoudre à la main $f'(x) \geq 0$:

  $$\begin{aligned}
  2x - 3 &\geq 0 && \\
  2x &\geq 3x && \text{On ajoute 3 de chaque côté} \\
  x &\geq \frac{3}{2} && \text{On divise par 2 de chaque côté}
  \end{aligned}$$

  On trouve donc que f' est positive là où x est plus grand que $\frac{3}{2}$, et f' est négative de l'autre côté, ce qui donne le tableau de variations :

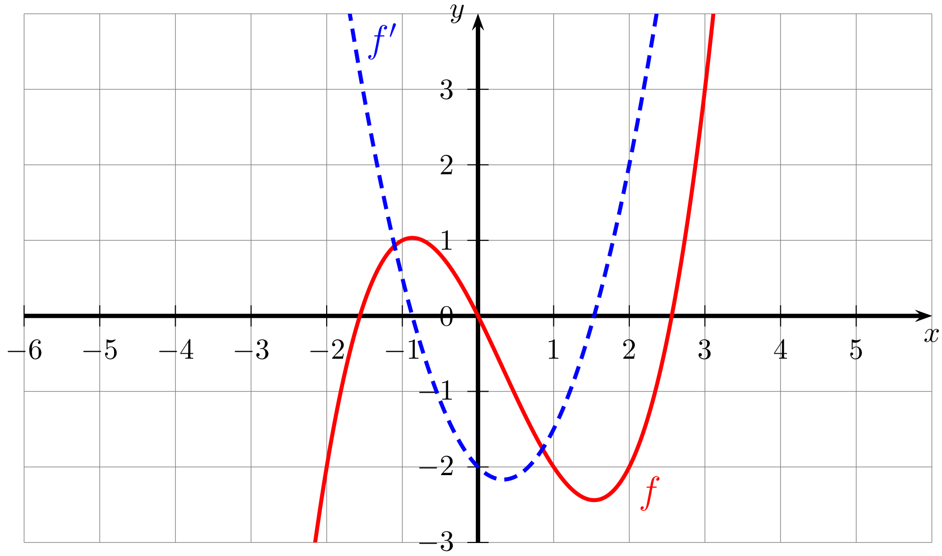
x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var $f(x)$		↘		↗	

- Une méthode spécifique à la fonction qui nous est présentée est de se rendre compte qu'ici il s'agit d'une fonction du second degré, donc la représentation graphique est une parabole. On sait que la parabole est symétrique, donc en particulier le sommet est au milieu des deux racines. Or ici c'est facile de trouver les racines de f : effectivement $f(x) = 0$ donne $x^2 - 3x = 0$ ce qui se factorise en $x(x-3) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = 3$. Les racines étant 0 et 3, le sommet est au milieu, donc en $\frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$.

Dans les deux cas on a trouvé que f a un minimum en $x = \frac{3}{2}$. On calcule $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{9}{4} = -2,25$. Or $-2,25 \leq -2$ donc $\boxed{\text{le trou est assez profond}}$.

Exercice 9 **5 points**

Le diagramme ci-dessous montre le graphique d'une fonction f et celui de sa fonction dérivée f' — 5 points



a) **Déterminer** $f(2)$ et $f'(2)$.

b) **Établir** une équation de la tangente au graphique de la fonction f au point d'abscisse $x = 2$.

a) Graphiquement, on lit $\boxed{f(2) = -2}$ et $\boxed{f'(2) = 2}$.

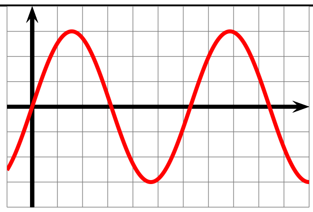
b) On utilise la formule de la tangente au point d'abscisse a : $\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$.

Ici, $a = 2$, et on vient de lire $f(2)$ et $f'(2)$ d'où l'équation $y = 2 \times (x - 2) + (-2)$ c'est-à-dire $\boxed{y = 2x - 6}$.

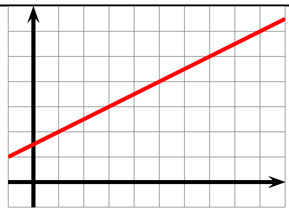
Exercice 47 **5 points**

Voici trois expressions algébriques de fonctions réelles (avec a et b étant des nombres réels positifs) et les leurs graphiques : — 5 points

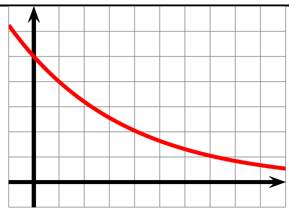
$f(x) = a \cdot b^x$ avec $b > 1$; $\quad g(x) = a \cdot x + b$; $\quad h(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$.



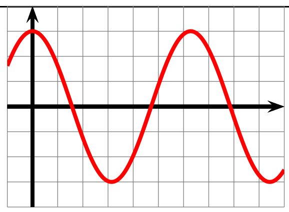
Graphe A



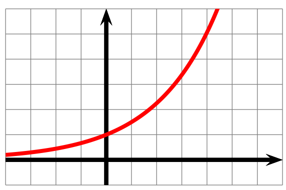
Graphe B



Graphe C



Graphe D



Graphe E

a) **Attribuer** chaque graphique (de A à E) à l'expression algébrique appropriée (de f à h).

b) Pour les deux autres graphiques non attribués, **indiquez** leur modèle.

a) La fonction f représente une croissance exponentielle : il s'agit du $\boxed{\text{graphe E}}$.

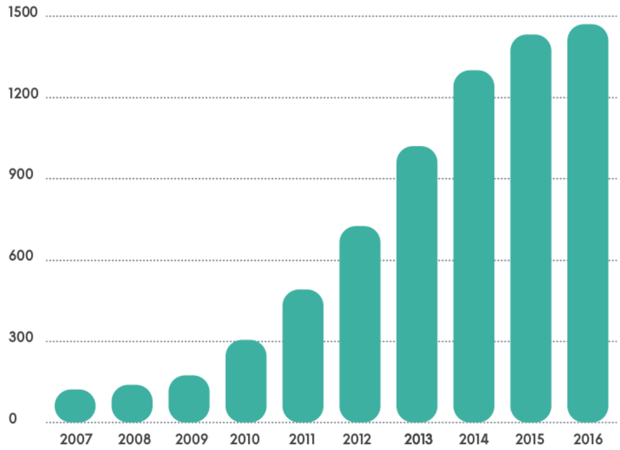
La fonction g représente un modèle linéaire : il s'agit du $\boxed{\text{graphe B}}$.

La fonction h représente un modèle périodique, donc il peut s'agir du graphe A ou D. Ici le déphasage est nul (on peut calculer $h(0) = a \cdot \sin(b \cdot 0) = a \cdot \sin(0) = a \cdot 0 = 0$) donc c'est le $\boxed{\text{graphe A}}$.

b) Le graphe C correspond à une $\boxed{\text{décroissance exponentielle}}$ et le graphe D correspond à un $\boxed{\text{modèle périodique}}$.

Exercice 48 **5 points**

En 2007, presque personne ne possédait de smartphone. En 2017, beaucoup de personnes en possèdent un. À l'échelle mondiale, parmi les personnes âgées de 18 à 35 ans, près de 2 personnes sur 3 possèdent un smartphone. Le graphique ci-contre montre le nombre de smartphones vendus en millions chaque année à partir de 2007.



a) Entre 2009 et 2013, **donnez** le modèle que vous utiliseriez pour décrire l'évolution du nombre de smartphones vendus.

b) À partir de 2014, le modèle précédent n'est plus valable. **Donner** une raison possible.

5 points

a) Entre 2009 et 2013, j'utiliserais une $\boxed{\text{croissance exponentielle}}$ pour décrire l'évolution du nombre de smartphones vendus.

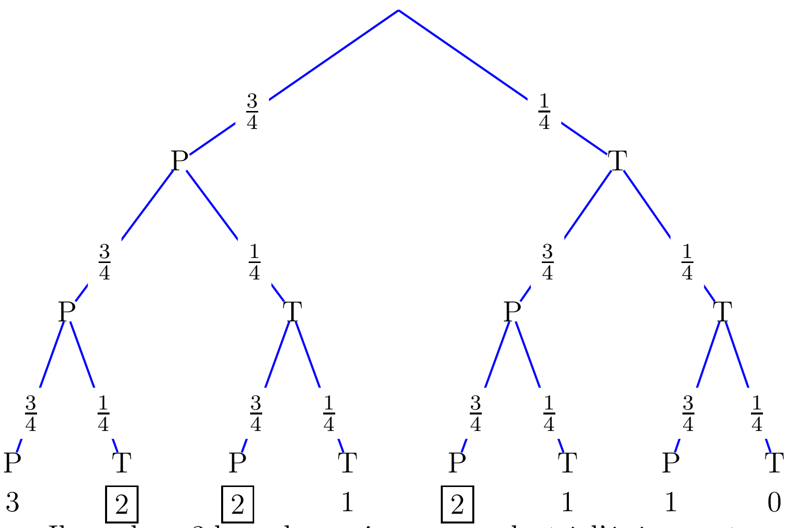
b) Au début de l'étude, presque personne n'a de smartphone, et donc quasiment chacun veut s'en équiper. Au bout d'un certain temps, toutes les personnes qui voulaient s'équiper en possèdent un. Seuls les gens qui veulent renouveler leur smartphone vont en acheter un, ce qui fait que le nombre de smartphones vendus ne suivra plus le même modèle.

Exercice 108 **5 points**

À la cafétéria, on peut acheter des sandwichs. $\frac{3}{4}$ des personnes choisissent le poulet. Les autres choisissent le sandwich au thon.
Calculer la probabilité de vendre exactement 2 sandwichs au poulet aux 3 prochains clients.

5 points

On va dessiner un arbre, où P = « un sandwich au poulet » et T = « un sanwdich au thon », et tout en bas on compte le nombre de sandwiches au poulet :



Il y a donc 3 branches qui correspondent à l'événement considéré, et sur chaque branche il y a 2 fois P et 1 fois T donc chaque branche a une probabilité de $\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{3^2}{4^2} \times \frac{1}{4} = \frac{3^2}{4^3}$. Au final la probabilité recherchée est de $3 \times \frac{3^2}{4^3} = 3 \times \frac{9}{64} = \boxed{\frac{27}{64}}$.

Sinon, on pouvait voir qu'il s'agit d'une situation où la loi binomiale s'applique (répétition 3 fois d'un événement identique, de manière indépendante, avec probabilité de succès égale à 3/4). En appelant X la variable aléatoire qui compte le nombre de sandwiches au poulet, on doit calculer $P(X=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^1$ ce qui revient bien sûr au même (et c'est certainement plus simple si on arrive à correctement appliquer la formule).

Exercice 109 **5 points**

La probabilité qu'un homme soit au supermarché parce que sa femme l'y a envoyé est de $\frac{2}{3}$.
La probabilité qu'un homme envoyé par sa femme au supermarché ait la pièce nécessaire pour le chariot est $\frac{1}{5}$.
La probabilité qu'un homme qui est au supermarché sans avoir été envoyé par sa femme ait la pièce pour le chariot est de $\frac{3}{5}$.

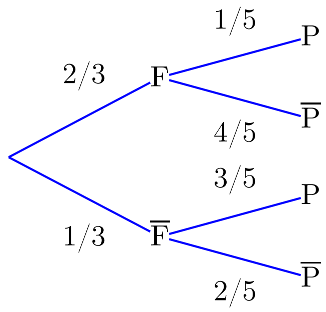
a) **Construire** un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

b) Sachant qu'un homme a la pièce pour le chariot, **calculer** la probabilité qu'il ait été envoyé au supermarché par sa femme.

5 points

a) On considère un homme présent au hasard dans le supermarché, et on note :

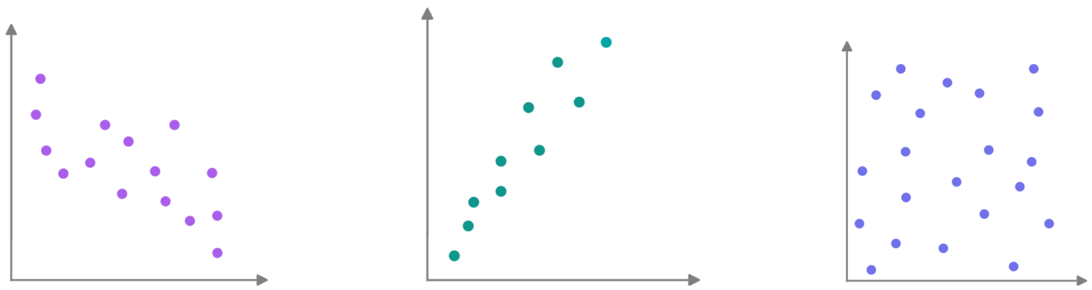
- F l'événement : « cet homme a été envoyé par sa femme » ;
- P l'événement : « cet homme a la pièce pour le chariot ».



b) Dans cette question, on sait que P est réalisé, et on demande la probabilité de F. Il faut donc calculer $P_{\text{P}}(\text{F})$. On la calcule avec la formule $P_{\text{P}}(\text{F}) = \dfrac{P(\text{F} \cap \text{P})}{P(\text{P})}$. On lit sur l'arbre que $P(\text{F} \cap \text{P}) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{15}$ et que $P(P) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{15} + \dfrac{3}{15} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$. Ainsi $P_{\text{P}}(\text{F}) = \dfrac{P(\text{F} \cap \text{P})}{P(\text{P})} = \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{15} \times \dfrac{3}{1} = \boxed{\dfrac{2}{5}}$.

Exercice 136 **5 points**

Trois diagrammes ci-dessous présentent des nuages de points.



1 2 3

Relier chaque diagramme de nuages de points (1, 2, 3) avec l'énoncé le plus approprié (a, b, c) et **expliquer** vos réponses.
a : Nous avons représenté graphiquement l'âge d'un homme et le nombre de cheveux sur sa tête.
b : Nous avons représenté graphiquement la pointure d'une femme et la longueur de ses cheveux.
c : Nous avons représenté graphiquement l'alimentation et le gain de poids d'une personne.

5 points

(a) plus l'âge d'un homme augmente, moins il a de cheveux ($\boxed{\text{graphique 1}}$, corrélation négative) ; (b) il n'y a aucun lien entre la pointure d'une personne et sa longueur de cheveux ($\boxed{\text{graphique 3}}$, aucune corrélation) et (c) plus une personne mange, plus elle gagne de poids ($\boxed{\text{graphique 2}}$, corrélation positive).

Exercice 77 **5 points**

On suppose que plus les enfants maîtrisent leur 1ère langue (langue maternelle), plus ils réussiront dans leur langue seconde.
Dans un groupe préscolaire, 12 enfants bilingues ont été testés dans leur langue maternelle et leur langue seconde. La note maximale pour chaque test était de 20 points. Les résultats des deux tests sont présentés dans le tableau ci-dessous :

5 points

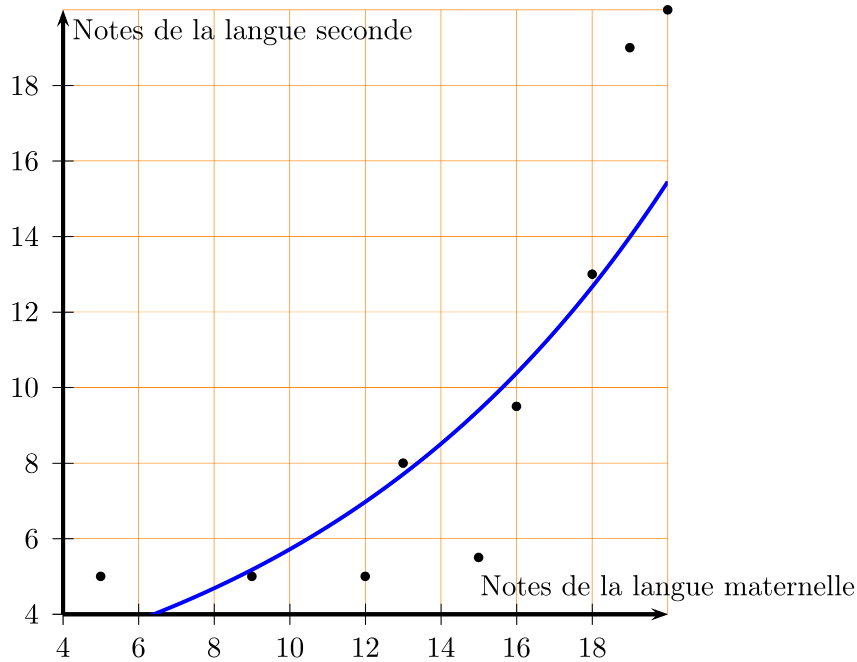
Notes de la langue maternelle	5	9	12	13	15	16	18	19	20
Notes de la langue seconde	5	5	5	8	5,5	9,5	13	19	20

a) **Tracer** un graphique en nuage de points représentant les données du tableau. Les points de la première langue sont la variable indépendante et les points de la langue seconde sont la variable dépendante.

b) Le coefficient de corrélation linéaire est $r = 0,84$. En se basant sur ce coefficient de corrélation, **interpréter** la relation entre ces deux variables.

c) Nous décidons d'utiliser une régression exponentielle. **Tracez** sur le graphique de la question a) le graphe d'une fonction exponentielle qui correspond à ces résultats.

a) Puisque les notes vont entre 5 et 20, on peut utiliser 1 cm pour 2 points dans chaque direction :



b) Le coefficient de corrélation linéaire est $r = 0,84$, ce qui correspond à une corrélation positive, pas tout à fait $0,9$ mais presque, donc on peut quasiment considérer qu'il y a une corrélation linéaire positive entre les deux variables : de meilleures notes en langue maternelle donnent de meilleures notes en langue seconde.

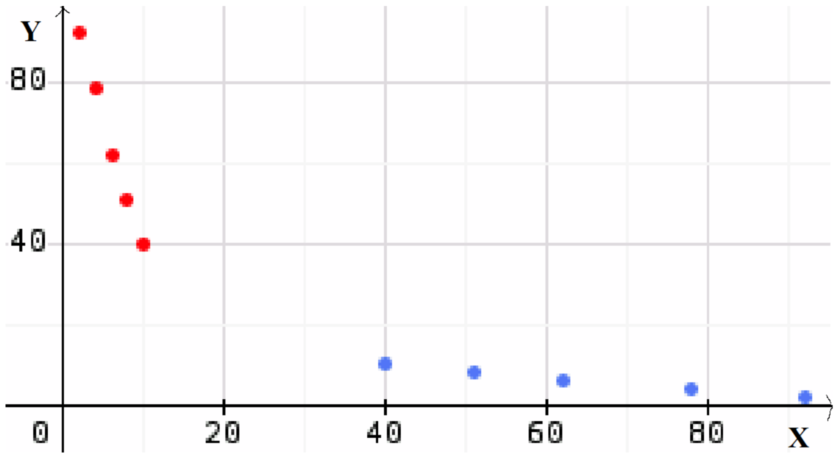
c) Voir graphique (ou tout tracé approximatif d'une fonction exponentielle croissante proche des points).

Exercice 145 **25 points**

La glace carbonique (CO_2 à l'état solide) produit, à une certaine température ambiante, du gaz qui peut être facilement être vu à l'œil nu.
Le célèbre chef Sebastianic a l'intention d'utiliser 100 g de glace carbonique pour produire un effet magique pour sa dernière création, un dessert spécial. Afin de comprendre comment se comporte la glace carbonique, Sebastianic a pris plusieurs fois le poids lors de la sublimation de l'échantillon :

Temps en min (x)	2	4	6	8	10
Poids de la glace carbonique en g (y)	92	78	62	51	40

a) **Recopier** sur votre feuille le nuage de points correspondant aux données du tableau en choisissant entre le diagramme rouge ou le diagramme bleu ci-dessous : — 2 points

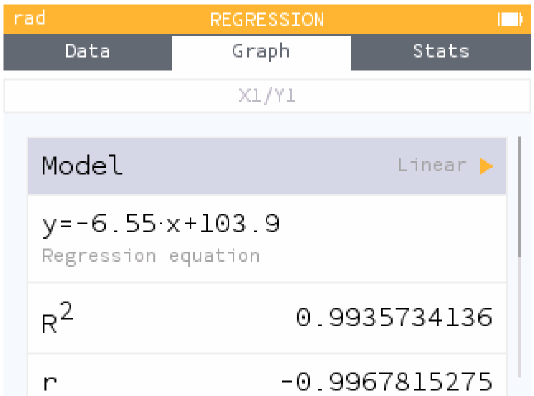


b) **Donner** la valeur du coefficient de corrélation linéaire des données et **expliquer** si une telle valeur indique ou non une dépendance linéaire entre les deux variables. **Expliquez** pourquoi le coefficient de corrélation linéaire a une valeur négative. — 3 points

c) **Établir** l'équation sous la forme $y = m \cdot x + b$ de la régression linéaire de y en x des données du tableau. **Donnez** les nombres m et b au centième près. — 3 points

a) Il s'agissait du $\boxed{\text{diagramme rouge}}$.

Pour les deux prochaines questions, dans le menu principal, on choisit le menu « Régressions ». On rentrer dans la colonne X1 les valeurs $2, 4, 6, 8, 10$ et dans la colonne Y1 les valeurs $92, 78, 62, 51, 40$. On clique ensuite sur « Graphique » puis sur « Régression » et sur « Linéaire $m \cdot x + b$ ». La droite se trace, pour voir son équation on reclique sur « Régression ».



b) On trouve $\boxed{r \approx -0,9967815}$ ce qui est très proche de -1 et indique donc une dépendance linéaire très forte entre les deux variables. Le coefficient de corrélation linéaire a une valeur négative ce qui veut dire que le poids de la glace carbonique $\boxed{\text{décroit}}$ avec le temps.

c) On trouve $\boxed{y = -6,55x + 103,9}$.

Dans les questions d) et e), utilisez le modèle $y = -6,6 \cdot x + 104$.

d) **Utilisez** le modèle pour **calculer** combien de grammes de glace carbonique sont encore présents après 13 minutes. **Expliquez** si ce modèle permet une bonne estimation pour le poids de la glace carbonique après 20 minutes. — 3 points

e) **Utilisez** le modèle pour **calculer** au bout de quelle durée la glace carbonique aura totalement disparu. — 3 points

Le chef Sebastianic est satisfait des résultats de la glace carbonique et ajoute au menu le nouveau dessert. Afin de répondre à la demande, il doit acheter de la glace carbonique. Le coût est bien décrit par la fonction :

$$f(x) = (5 + x)\mathrm{e}^{-0,12x} + 3$$

où $f(x)$ désigne le coût en euros par kilogramme de glace carbonique et x le nombre d'années depuis le début de l'année 2000 (le début de l'année 2000 correspond à $x = 0$).

f) Sebastianic a acheté 1 kg de glace carbonique début 2023. **Déterminez** combien il a payé. — 2 points

La fonction dérivée de la fonction f est donnée par : $$f'(x) = (0,4 - 0,12x)\mathrm{e}^{-0,12x}$$ La fonction f n'a qu'un seul extremum.	
g) **Calculez** en quelle année le coût de la glace carbonique était le plus élevé et **indiquez** ce coût en euros.	3 points
h) **Indiquez** les intervalles pour lesquels le coût de la glace carbonique est croissant, et les intervalles pour lesquels ce coût est décroissant.	3 points
i) **Calculer** les valeurs $f'(8)$ et $f'(20)$ qui indiquent le taux de variation du coût de la glace carbonique dans le temps, au début de l'année 2008 et au début de l'année 2020. **Déterminez** pour laquelle de ces années le prix a baissé le plus rapidement.	3 points

d) Dans le modèle $y = -6,6 \cdot x + 104$, on va remplacer x par 13 et on trouve $y = 18,2$ c'est-à-dire $\boxed{18,2 \text{ g}}$. Si on remplace x par 20, on trouve $y = -28$ ce qui est $\boxed{\text{incohérent}}$, c'est une valeur négative pour une masse, donc le modèle n'est plus valide !

e) Ici on cherche quand y vaut 0, on doit donc résoudre :

$$\begin{aligned} 0 &= -6,6 \cdot x + 104 && +6,6x \\ 6,6 \cdot x &= 104 && \div 6,6 \\ x &= \boxed{\frac{104}{6,6} = \frac{520}{33}} \end{aligned}$$

On trouve donc $x \approx 15,75$, c'est-à-dire $\boxed{\text{15 minutes et 45 secondes}}$ $(0,75 \times 60 = 45)$. On pouvait évidemment utiliser le menu « Equations » de la calculatrice et faire résoudre l'équation par la calculatrice.

f) Début 2023, cela correspond à $x = 23$. Dans le menu « Grapheur » on rentre l'expression de f, puis on peut demander $f(23) \approx 4,77$, donc le chef a payé $\boxed{4,77€}$.

g) En affichant le graphique de la fonction, puis en demandant de calculer le maximum, la calculatrice répond que c'est en $x \approx 3,33$ ce qui correspond à $\boxed{\text{début mai 2003}}$ ($x = 3$ correspond à début 2003, on rajoute 0,33 soit un tiers de l'année soit 4 mois). Ce coût maximal est de $\boxed{8,59€}$.

Une autre méthode est de faire le lien avec la dérivée : la fonction a un extremum quand $f'(x) = 0$, c'est-à-dire $(0,4 - 0,12x)\mathrm{e}^{-0,12x} = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, donc soit $0,4 - 0,12x = 0$, soit $\mathrm{e}^{-0,12x} = 0$. Or l'exponentielle ne vaut jamais 0, donc on a :

$$\begin{aligned} 0,4 - 0,12x &= 0 && +0,12x \\ 0,4 &= 0,12x && \div 0,12 \\ \boxed{\frac{0,4}{0,12} = \frac{10}{3}} &= x \end{aligned}$$

h) Graphiquement, il est clair que la fonction f est d'abord croissante (jusqu'en $\frac{10}{3}$, donc) puis décroissante. Ainsi le coût de la glace est croissant pour $\boxed{x \in \left[0; \frac{10}{3}\right]}$ et il est décroissant pour $\boxed{x \in \left[\frac{10}{3}; +\infty\right[}$.

On pouvait le retrouver par le calcul : f croissante veut dire que f' est positive, il faut donc résoudre l'inéquation $(0,4 - 0,12x)\mathrm{e}^{-0,12x} \geq 0$. On peut appliquer la règle des signes, en sachant que l'exponentielle est toujours positive. C'est donc équivalent à $0,4 - 0,12x \geq 0$ qui se résout de manière similaire à l'équation en g).

i) En rentrant l'expression de f' dans la calculatrice, on trouve $\boxed{f'(8) \approx -0,21}$ et $\boxed{f'(20) \approx -0,18}$. Ainsi, c'est $\boxed{\text{au début de l'année 2008}}$ que le prix a baissé le plus rapidement (car la valeur est plus négative qu'au début de l'année 2020).

Exercice 146 **25 points**

Dans la première partie de cet exercice, nous étudions la cuisson d'un œuf qui vient d'être sorti d'un réfrigérateur.

Un œuf est à la coque lorsque son jaune atteint une température d'exactement 45°C.

Dans les questions a), b) et c), on considère un œuf de masse 60 g. Le temps de cuisson nécessaire pour que le jaune de cet œuf atteigne la température x est donné par la relation :

$$f(x) = -16 \cdot 60^{2/3} \cdot \ln\left(\frac{100-x}{192}\right)$$

où $f(x)$ représente le temps de cuisson en secondes et x la température en °C.

a) **Déterminez** combien de temps il faut pour que cet œuf soit à la coque. **Arrondir** à la seconde près. — 2 points

b) **Déterminez** la température du jaune d'œuf après qu'il a cuit pendant 240 secondes. **Arrondir** au degré près. — 3 points

c) **Dessinez** le graphique présentant le temps de cuisson $f(x)$ en fonction de la température x dans le jaune d'œuf pour des températures comprises entre 4°C et 45°C. — 4 points

À la question d), nous considérons un œuf à la coque après un temps de cuisson de 275 secondes. L'égalité suivante s'applique à la masse m (en grammes) de cet œuf :

$$275 = -16 \cdot m^{2/3} \cdot \ln\left(\frac{55}{192}\right)$$

d) **Déterminez** la masse de cet œuf. **Arrondir** au gramme près. — 3 points

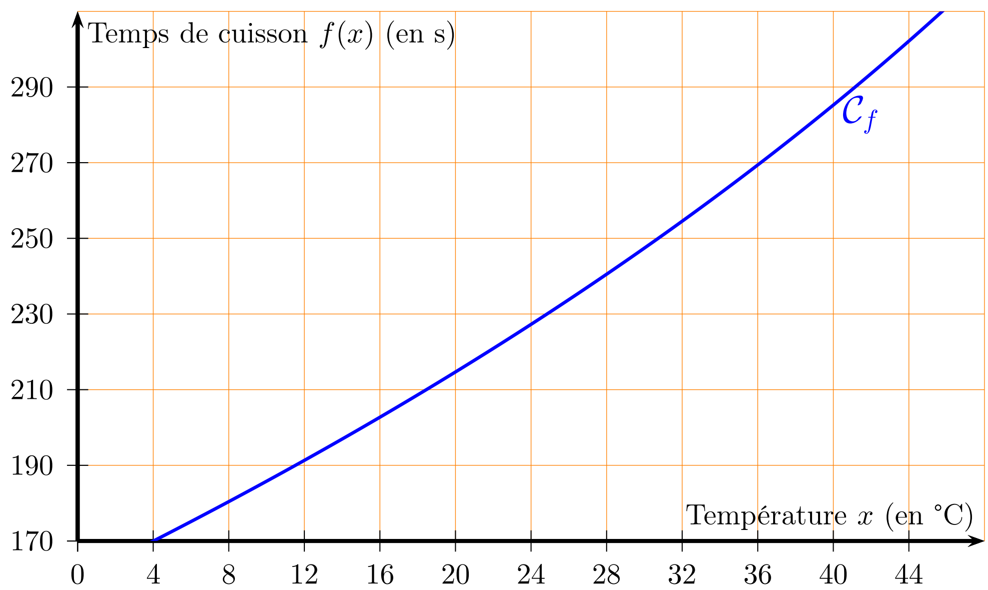
a) Pour que cet œuf soit à la coque, il faut que $x = 45$. On calcule donc $f(45) \approx 306,56$, donc $\boxed{\text{environ 307 s}}$.

b) Ici on sait que $f(x) = 240$ et on cherche x. On peut utiliser le menu « Equations » (comme intervalle de résolution, choisir une grande valeur maximale pour x par exemple 1000) ou le menu « Grapheur », on trouve $x \approx 27,85$ donc $\boxed{\text{environ 28°C}}$.

c) Pour x entre 4 et 45, on fait le tableau de valeurs suivant :

x	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
$f(x)$	170	180	191	203	215	227	241	254	269	285	302

Vu les valeurs, on peut prendre 1 cm pour 4°C en abscisse et 1 cm pour 10 s ou 20 s en ordonnées :



d) On nous demande de résoudre l'équation $275 = -16 \cdot m^{2/3} \cdot \ln\left(\frac{55}{192}\right)$.

On peut comme d'habitude aller dans le menu « Equations » (comme intervalle de résolution, choisir une grande valeur maximale pour x par exemple 1000) ou le menu « Grapheur » en appelant x l'inconnue, on trouve $x \approx 50,98$ donc $\boxed{\text{environ 51 g}}$.

Chaque matin d'une semaine (7 jours), un homme commande exactement un œuf. Chaque matin, la probabilité que l'œuf servi soit à la coque est de $p = 0,65$, indépendamment des autres matins. Soit X la variable aléatoire définissant le nombre d'œufs à la coque servis à cet homme pendant ces 7 matins.	
e) **Montrer** que X suit une distribution binomiale, et **donner** ses paramètres.	2 points
f) **Déterminez** la probabilité que cet homme n'ait reçu qu'un seul œuf à la coque au cours de ces 7 matinées.	3 points
g) **Déterminez** la probabilité que cet homme ait reçu des œufs à la coque pendant au moins 2 matinées au cours de cette semaine.	3 points
h) Nous savons que cet homme a reçu au moins deux œufs à la coque au cours de cette semaine. **Déterminez** la probabilité qu'on lui ait servi exactement trois œufs à la coque au cours de cette semaine.	2 points
i) **Déterminez** l'espérance et l'écart-type de la variable X. **Interprétez** ces valeurs dans le contexte.	3 points

e) On a la répétition (7 fois), d'un événement à deux issues identique (à la coque avec $p = 0,65$), de manière indépendante. X compte le nombre de succès dans cette répétition, et suit donc une loi binomiale de paramètres $\boxed{n = 7}$ et $\boxed{p = 0,65}$.

f) On demande $P(X = 1)$. On peut donc calculer $P(X = 1) = \binom{7}{1} \times (0,65)^1 \times (1-0,65)^{7-1} = 7 \times 0,65 \times 0,35^6 \approx$ $\boxed{0,0084}$. On pouvait aussi utiliser directement *binompdf* (la fonction de probabilité, en anglais probability distribution function) avec pour paramètres $k = 1$, $n = 7$, $p = 0.65$, la calculatrice répond également $\approx 0,0084$.

g) On veut calculer $P(X \geq 2)$ ce qu'on peut calculer comme $1 - P(X \leq 1)$ (ce deuxième calcul se fait avec *binomcdf*, la fonction de répartition, en anglais cumulative distribution function), ou alors $1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$, ou encore si vraiment on a oublié cette méthode comme $P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$ (cette 3e manière est beaucoup plus longue, ces 6 calculs se font avec *binompdf*, la fonction de probabilité, en anglais probability distribution function). On trouve $\boxed{\approx 0,99}$, donc la probabilité de manger au moins 2 œufs à la coque est d'environ $0,99$.

h) Dans cette question, on sait que $X \geq 2$ est réalisé, et on demande la probabilité de $X = 3$. Il faut donc calculer $P_{X\geq 2}(X = 3)$. On la calcule avec la formule $P_{X\geq 2}(X = 3) = \dfrac{P((X \geq 2) \cap (X = 3))}{P(X \geq 2)}$.

L'événement $(X \geq 2) \cap (X = 3)$ est le même que l'événement $X = 3$ (c'est l'événement à la fois $X \geq 2$ et $X = 3$ ce qui est bien pareil que $X = 3$), donc on calcule $\dfrac{P(X = 3)}{P(X \geq 2)}$. On a déjà calculé $P(X \geq 2)$ à la question précédente, il nous reste à calculer $P(X = 3) = \binom{7}{3} \times (0,65)^3 \times (1 - 0,65)^{7-3} = 7 \times 0,65^3 \times 0,35^4 \approx 0,14$.

Pour le calcul on va laisser le plus de décimales possibles, on reprend les calculs à la calculatrice, ainsi : $P_{X\geq 2}(X = 3) = \dfrac{0,1442381992}{0,9909924984} \approx \boxed{0,145}$.

i) L'espérance de X se calcule comme $E(X) = n \cdot p$ (voir formulaire), c'est-à-dire $E(X) = 7 \times 0,65 = \boxed{4,55}$. Cela veut dire qu'en moyenne, dans la semaine il mangera $4,55$ œufs à la coque.

L'écart-type de X se calcule comme $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ (voir formulaire), c'est-à-dire : $\sigma(X) = \sqrt{7 \times 0,65 \times 0,35} \approx \boxed{1,26}$. Cela veut dire qu'il y a une bonne probabilité qu'il mange entre 3,3 $(4,55 - 1,26)$ et 5,8 $(4,55 + 1,26)$ œufs à la coque.