1 Taux de variation

Soit f une fonction.

On appelle taux de variation moyen de f sur l'intervalle $[a;b]$ le quotient : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. C'est la pente de la droite qui passe par les points $\mathrm{A}(a;f(a))$ et $\mathrm{B}(b;f(b))$ (cette droite est une sécante à la courbe : elle coupe la courbe aux points A et B).

Quand les nombres a et b se "rapprochent de plus en plus", ce taux de variation moyen finit par être un taux de variation instantané de f en a ou nombre dérivé de f en a. C'est la pente de la tangente à $\mathcal{C}_f$ (la courbe de f) au point $\mathrm{A}(a;f(a))$.

La fonction dérivée (ou simplement dérivée) de f est la fonction qui à chaque nombre réel x donne le nombre dérivé de f en x. Elle est notée f'. On écrit $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a.

On a une tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$ (la courbe de f) au point d'abscisse a si et seulement si $f'(a)=0$.

2 Formules

La dérivée de la fonction polynôme de degré 4 : $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ est :
$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$. Ce qui peut être déduit du tableau de dérivées classiques :

Si $f(x)=$	alors la dérivée de f est $f'(x)=$	sur l'intervalle
C (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^4	$4x^3$	$\mathbb{R}$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$

Équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ (la courbe de f) au point d'abscisse a : $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$. Dans cette équation, il faut remplacer les valeurs de $f(a)$ et $f'(a)$ avec la fonction, mais il faut garder le x et le y qui symbolisent les coordonnées des points sur la droite.

3 Variations

Théorème : Soit f une fonction qui admet une dérivée sur un intervalle I. On doit retenir que :

- f' est positive sur I est équivalent à f est croissante sur I
- f' est négative sur I est équivalent à f est décroissante sur I.

Application très importante : étude des variations d'une fonction f grâce au tableau de signes de sa dérivée f'.

Exemple : $f(x)=x^3-12x^2+21x+4$:

x	0		1		7		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Var $f(x)$		$\nearrow$	14	$\searrow$	-94	$\nearrow$	

La fonction f admet un extremum (minimum ou maximum) local en a si sa dérivée s'annule pour la valeur a en changeant de signe. Dans l'exemple précédent, il y a un maximum local en $x=1$, qui vaut 14, et un minimum local en $x=7$ qui vaut -94.

Remarque : il est possible d'avoir $f'(a) = 0$ sans avoir d'extremum. Prenons la fonction $f(x) = x^3$ (voir ci-dessous) :

1. sa dérivée est $f'(x) = 3x^2$;
2. $f'(0)$ est donc égal à $3 \cdot 0^2 = 0$;
3. et pourtant, il n'y a pas d'extremum en 0 : la fonction est croissante avant 0, continue d'être croissante après 0 ;
4. en 0, on dit alors qu'il y a un point d'inflexion (c'est le cas quand la courbe de la fonction « traverse » sa tangente).