Chapitre 1.
Phénomènes continus d'évolution

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

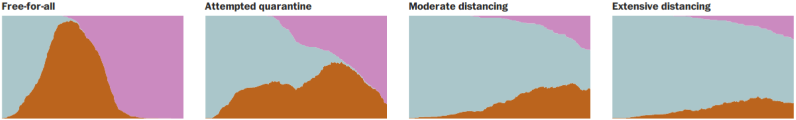
Année scolaire 2023–2024

Plan du chapitre

- Les fonctions exponentielles
- Les fonctions logarithmes
- Étude de certaines fonctions

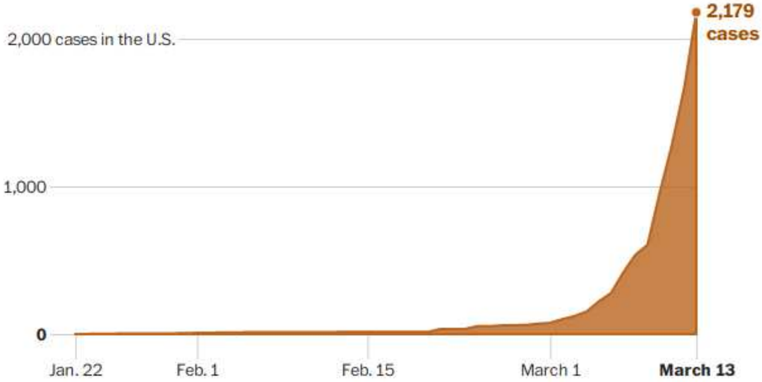
Introduction : COVID-19, une croissance exponentielle

https://www.washingtonpost.com/graphics/2020/world/corona-simulator/

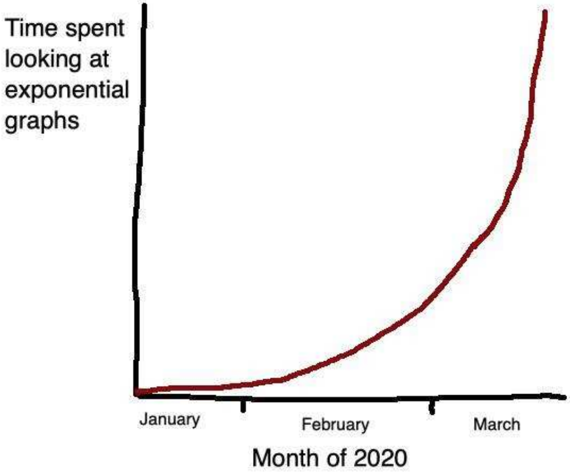


Introduction : COVID-19, une croissance exponentielle

https://www.washingtonpost.com/graphics/2020/world/corona-simulator/



https://elbruno.com/2020/03/29/humor-time-looking-at-exponential-graphs-during-the-past-months/



I/ Les fonctions exponentielles

Soit $b > 0$, $b \neq 1$. Alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto b^x$ est la fonction exponentielle de base b.

Croissance exponentielle

Si $b > 1$, on parle de croissance exponentielle.

Exemple : placement d'argent à un taux $t > 0$.

Décroissance exponentielle

Si $0 < b < 1$, on parle de décroissance exponentielle.

Exemple : datation au carbone 14.

Remarque : si $b = 1$, la fonction $x \mapsto 1^x$ est... la fonction constante égale à 1 !

Remarque : si $b < 0$, on ne peut pas définir sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto b^x$.

Les propriétés sur les exposants qui ont été vues lors des années précédentes sont toujours valables :

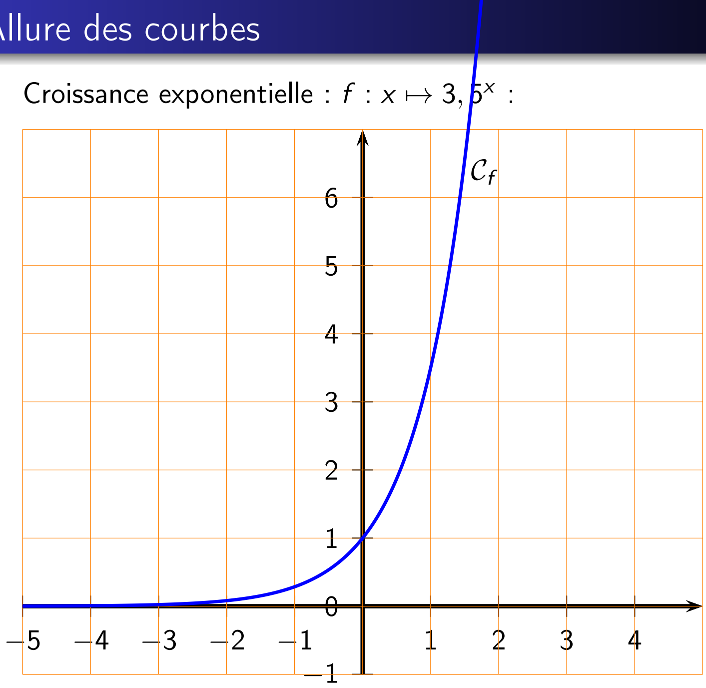
Propriétés des exposants

- $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$
- $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$
- $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
- $(b^x)^y = b^{x \cdot y}$

Remarque : les fonctions exponentielles ont déjà été vues en S5.

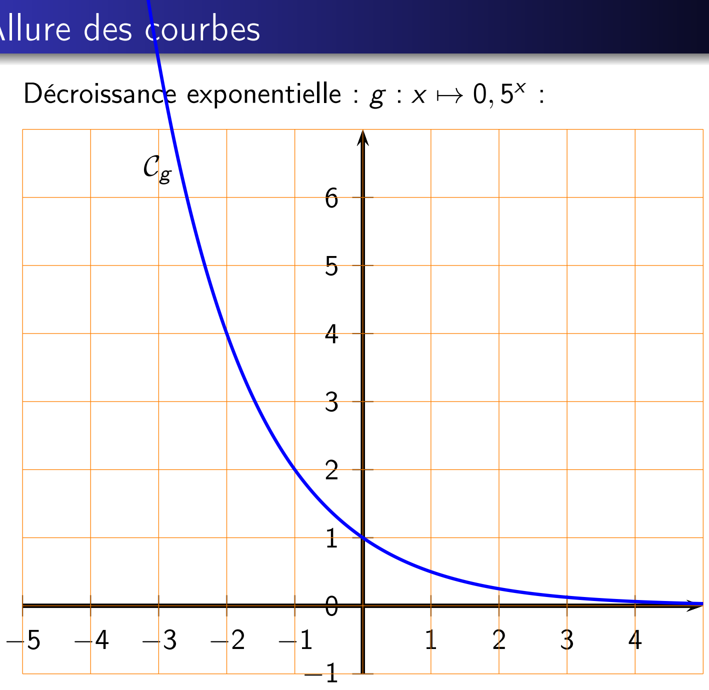
Remarque : pour tout $b \in \mathbb{R}$, $b^0 = 1$, donc la courbe d'une fonction exponentielle passe toujours par le point $(0, 1)$.

Croissance exponentielle : $f : x \mapsto 3,5^x$:



Allure des courbes

Décroissance exponentielle : $g : x \mapsto 0,5^x$:



Résolution d'équation

On peut bien sûr résoudre graphiquement ou bien à la calculatrice une équation de type $b^x = c$ (où l'inconnue est en exposant).

Dans certains cas simples, on s'attend à ce que vous soyez capables de le faire à la main ! Effectivement lorsqu'on a une équation de type $b^X = b^Y$, où l'inconnue x est dans l'exposant (dans X et/ou Y), on peut appliquer la propriété suivante :

Équation où l'inconnue est en exposant

Pour tout nombre $b > 0$, $b \neq 1$, l'équation $b^X = b^Y$ est équivalente à l'équation $X = Y$.

Exemple : si on veut résoudre l'équation $2^{x+1} = 8$, on reconnaît à gauche et à droite deux puissances de 2 (car $8 = 2^3$), c'est-à-dire $2^{x+1} = 2^3$, donc c'est équivalent à résoudre $x + 1 = 3$. On sait résoudre cette équation : cela donne $x = 2$.

La fonction exponentielle

e est un nombre particulier (qui vaut $e \approx 2,718281828$).

La fonction exp (fonction exponentielle de base e), définie par $\exp(x) = e^x$ est l'unique fonction exponentielle dont la dérivée est elle-même !

- $\exp'(x) = \exp(x)$, c'est-à-dire : $\dfrac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$

(cette dérivée est dans le formulaire)

Réécriture de formules

Pour chacune des formules suivantes : est-ce que c'est une fonction exponentielle ? Si oui, est-ce qu'elle est croissante ou décroissante ?

1. $3 \cdot e^{x}$
2. $e \cdot x$
3. $5 \cdot 0,8^{x}$
4. $0,8^{2 \cdot x}$
5. $0,5^{-4 \cdot x}$
6. $0,5^{-0,1 \cdot x}$
7. $e^{-0,2 \cdot x}$
8. e^{2-x}

Quand on a besoin de réécrire les expressions utilisant des exponentielles, on utilisera les propriétés des exposants.

Par exemple, pour réécrire $3 \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot x+4}$ sous la forme $K \cdot A^{x}$, on calcule :

$$3 \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot x+4} = 3 \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot x} \cdot \mathrm{e}^{4} = 3 \cdot \mathrm{e}^{4} \cdot \left(\mathrm{e}^{2}\right)^{x}$$

On a donc trouvé $K = 3 \cdot \mathrm{e}^{4}$ et $A = \mathrm{e}^{2}$.

Afin de pouvoir résoudre tout type d'équation $b^x = c$ (rappel : $b > 0, b \neq 1$), on introduit les fonctions logarithmes[1].

Se demander « quel est le nombre, qui, en puissance de 5, donne 25 ? » (c'est-à-dire : résoudre $5^x = 25$) c'est se demander « quelle est le logarithme en base 5 de 25 ? ». On écrit $x = \log_5 25$.

Exemples : $\log_5(25) = 2$ car $5^2 = 25$.

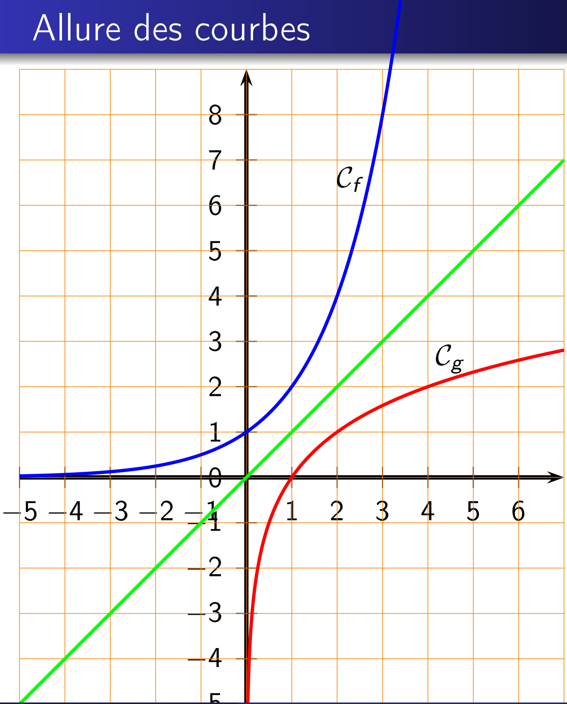
$\log_{10}(10\ 000) = 4$ car $10^4 = 10\ 000$.

$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$ car $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

1. Ceux qui ont suivi S5 maths 6 les ont déjà rencontrées.

La fonction logarithme de base b est la réciproque de la fonction exponentielle de base b.

- $\log_b\left(b^x\right) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $b^{\log_b(x)} = x$ pour tout $x > 0$



Pour tout $b > 0, b \neq 1$, la fonction $g : x \mapsto \log_b(x)$ a son graphique qui est le symétrique du graphique de $f : x \mapsto b^x$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Ci-contre avec $b = 2$:

- $f(x) = 2^x$
- $g(x) = log_2(x)$

La fonction exponentielle ($\exp(x) = \mathrm{e}^x$) a donc une fonction réciproque qui est une fonction logarithme. C'est une fonction logarithme particulière, qui a donc un nom particulier : le logarithme népérien.

Le logarithme népérien

La fonction réciproque de exp est la fonction logarithme de base e, appelée logarithme népérien ou "ln" (prononcé "elle haine"). On a ainsi $\ln(x) = \log_{\mathrm{e}}(x)$.

- $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$

(Remarque hors programme : on peut écrire toute fonction exponentielle à l'aide de la fonction exponentielle : $a^b = \mathrm{e}^{b \times \ln(a)}$)

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ où a et b sont des nombres réels.

Limites

$a > 0$ (f est croissante) :

- quand $x \to -\infty$, alors $f(x) \to 0$ (la limite de f est 0 quand x se rapproche de $-\infty$) ;
- quand $x \to +\infty$, alors $f(x) \to +\infty$ (la limite de f est $+\infty$ quand x se rapproche de $+\infty$).

$a < 0$ (f est décroissante) :

- quand $x \to -\infty$, alors $f(x) \to +\infty$;
- quand $x \to +\infty$, alors $f(x) \to 0$.

Rappel : Si $a = 0$, $f(x) = \mathrm{e}^{a \cdot 0+b} = \mathrm{e}^{b}$ donc f est une fonction constante.

Remarque : Dans tous les cas, se rappeler qu'une exponentielle est toujours strictement positive !

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ (car la fonction exp ne prend que des valeurs strictement positives).

Valeurs à retenir

$\ln(e) = 1$ (car $e = e^1$) et $\ln(1) = 0$ (car $1 = e^0$).

Limites — tableau de variations

x	0	$+\infty$
Variations de ln	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

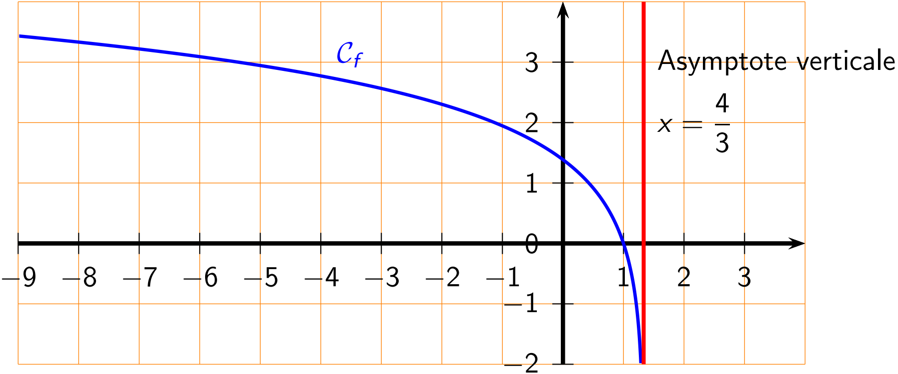
Dérivée

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Un exemple : la fonction $f(x) = \ln(-3x+4)$

$$
\begin{aligned}
-3x+4 &> 0 && \quad -4 \\
-3x &> -4 && \quad \div(-3) \\
x &< \frac{-4}{-3} && \quad \text{Intervalle} \\
x &\in \left]-\infty ; \frac{4}{3}\right[
\end{aligned}
$$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$
Variations de f	$+\infty$	$-\infty$



$$\begin{aligned} 2x - \mathrm{e} &> 0 && \\ 2x &> \mathrm{e} && +\mathrm{e} \\ x &> \frac{\mathrm{e}}{2} && \div 2 \\ x &\in \left]\frac{\mathrm{e}}{2} ; +\infty\right[&& \text{Intervalle} \end{aligned}$$

x	$\frac{\mathrm{e}}{2}$		$+\infty$
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$