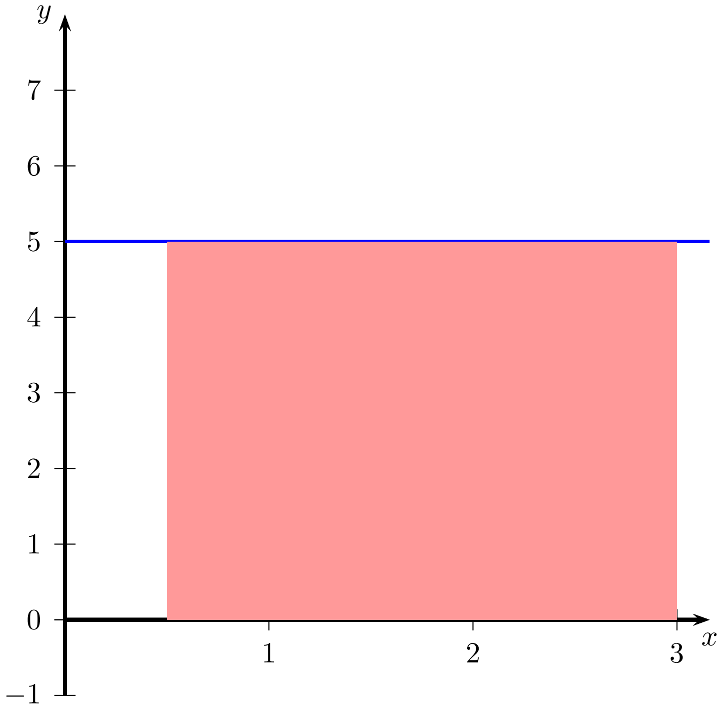
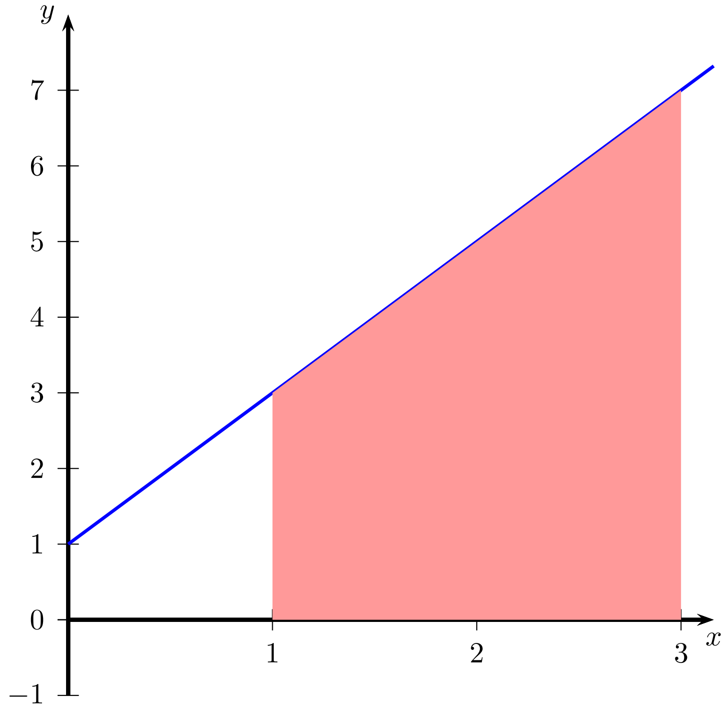
1 Aire sous la courbe : cas simples

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = 5$ et $g(x) = 2x + 1$. On souhaite calculer les aires sous les courbes de f et g suivantes :





- À gauche : c'est juste un rectangle. L'aire vaut largeur $\times$ longueur $= 2,5 \times 5 = 12,5$.

- À droite : on peut découper en un rectangle et un triangle.
  - ◇ $\mathcal{A}(\text{rectangle}) = \text{largeur} \times \text{longueur} = 2 \times 3 = 6$;
  - ◇ $\mathcal{A}(\text{triangle}) = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{2 \times 4}{2} = 4$;
  - ◇ donc $\mathcal{A}(\text{rouge}) = 6 + 4 = 10$.

Pour <u>f une fonction positive</u>, on note $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$ l'aire comprise entre $\left\{\begin{array}{l}\text{la courbe de } f\\ \text{l'axe des abscisses}(\mathrm{O}x)\\ \text{la droite d'équation } x = a\\ \text{la droite d'équation } x = b\end{array}\right.$

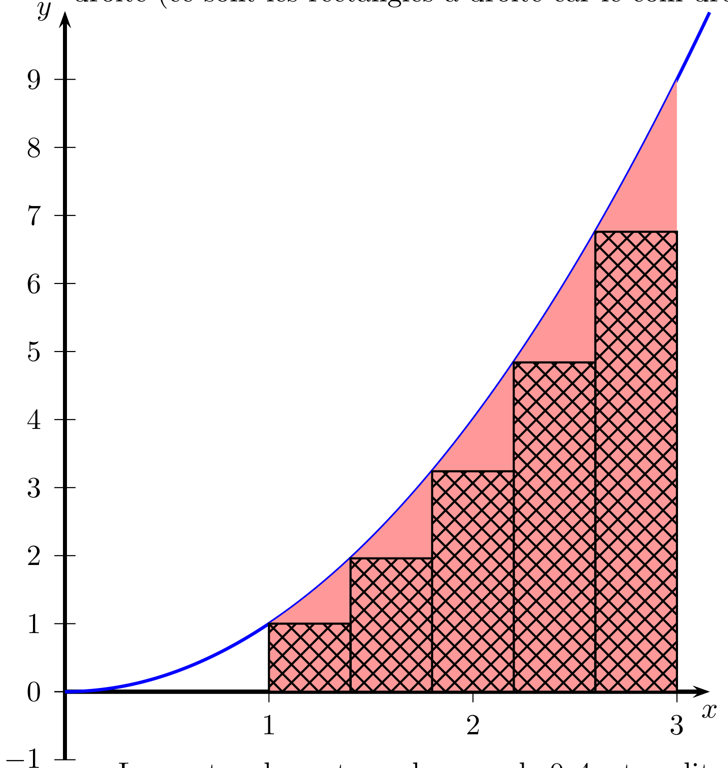
Ainsi :

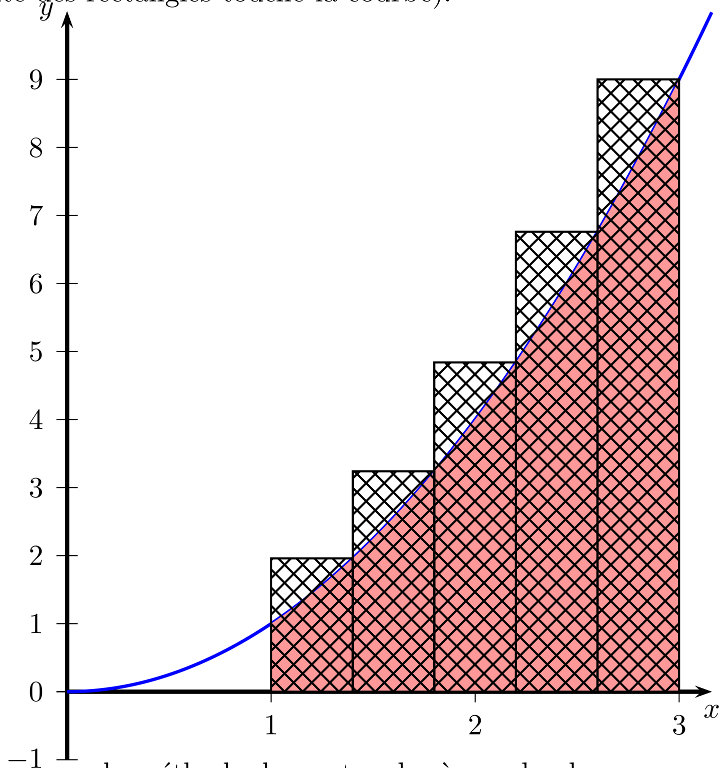
- sur la gauche on a calculé $\displaystyle\int_{0,5}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0,5}^{3} 5\,\mathrm{d}x = 12,5$;

- sur la droite on a calculé $\displaystyle\int_{1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} (2x+1)\,\mathrm{d}x = 10$.

2 Aire sous la courbe : méthode des rectangles

On souhaite calculer une approximation de $\mathcal{A} = \int_1^3 t^2 \,\mathrm{dt}$ (en rouge). On pose A_g l'aire hachurée de gauche (ce sont les rectangles à gauche car le coin gauche des rectangles touche la courbe) et A_d celle de droite (ce sont les rectangles à droite car le coin droite des rectangles touche la courbe).

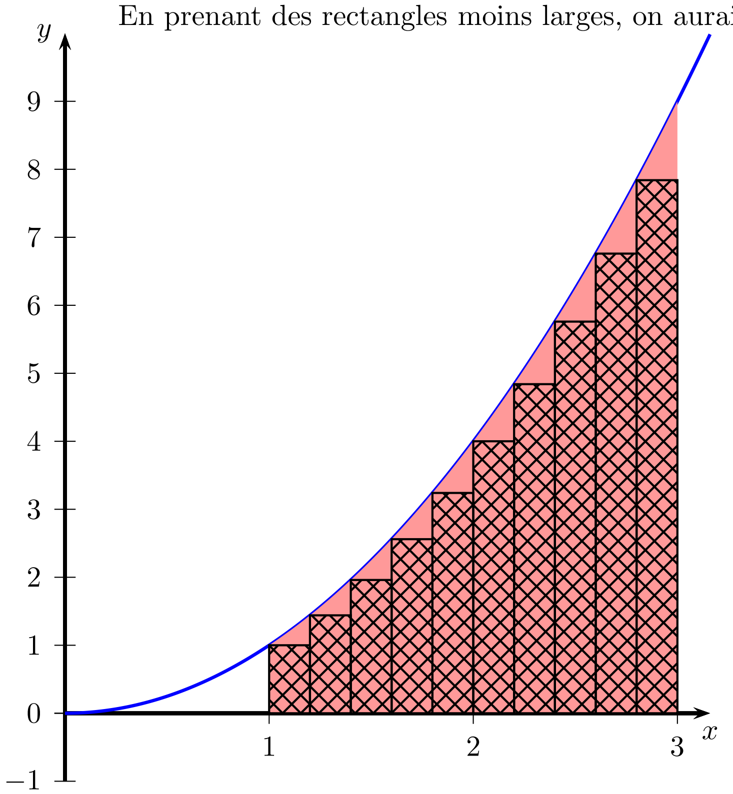


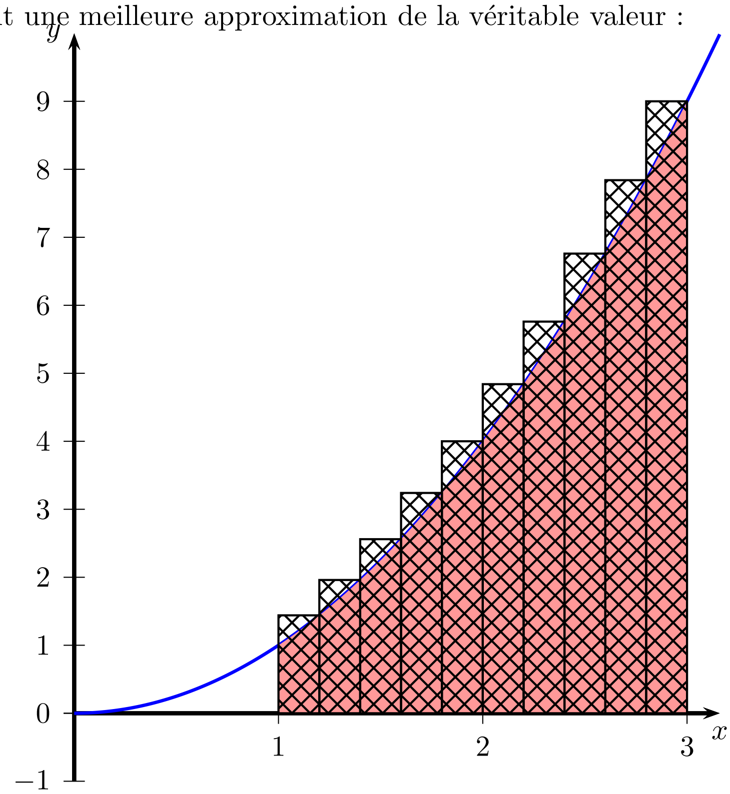


Les rectangles ont une largeur de $0,4$, et on lit donc que la méthode des rectangles à gauche donne une aire de $\approx 0,4 \times 1 + 0,4 \times 2 + 0,4 \times 3,25 + 0,4 \times 4,9 + 0,4 \times 6,75 = 7,16$; la méthode des rectangles à droite donne une aire de $\approx 0,4 \times 2 + 0,4 \times 3,25 + 0,4 \times 4,9 + 0,4 \times 6,75 + 0,4 \times 9 = 10,36$. Ainsi on a :

$$7,16 \leq \int_1^3 t^2 \,\mathrm{dt} \leq 10,36$$

En prenant des rectangles moins larges, on aurait une meilleure approximation de la véritable valeur :



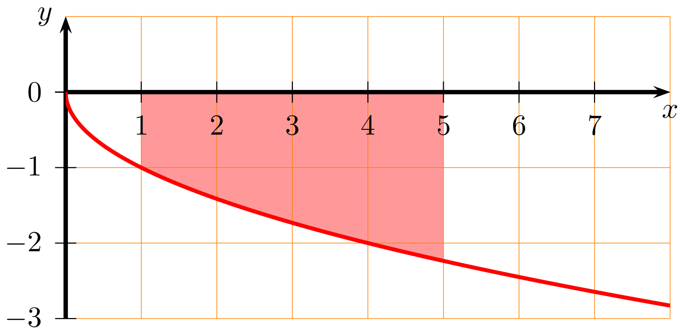


3 Aire sous la courbe : quand la fonction n'est pas toujours positive

Tout ce qu'on a vu jusqu'ici n'est valable que pour une fonction positive. Essayez de calculer à la calculatrice :

$$\int_1^5 -\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

En regardant sur le dessin, on voit que ça doit correspondre à l'opposé de l'aire rouge. Effectivement, dans ce cas, c'est l'aire « sur » la courbe (car l'axe (Ox) est au-dessus).



Si f est négative, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire comprise entre $\begin{cases} \text{la courbe de } f \\ \text{l'axe des abscisses(O}x\text{)} \\ \text{la droite d'équation } x = a \\ \text{la droite d'équation } x = b \end{cases}$

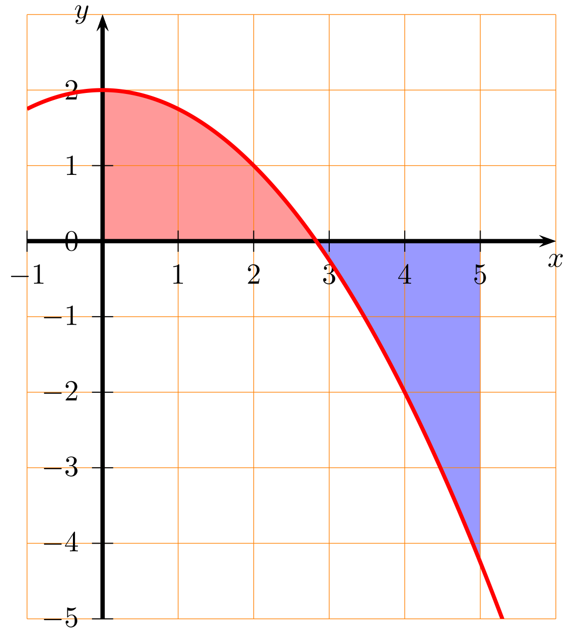
Et si la fonction est à la fois positive et négative ? Par exemple, si on considère la fonction $f(x) = 2 - \dfrac{x^2}{4}$, entre 0 et 5. . .

Il est parfois utile d'utiliser la relation de Chasles :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Si on a une calculatrice, on peut aussi calculer avec la valeur absolue :

$$\boxed{\text{Aire entre la courbe et l'axe des } x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$$



1) À quoi correspond le calcul intégral $\displaystyle\int_0^5 \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x$?

À l'aide de la relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^5 \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{2,8} \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x + \int_{2,8}^5 \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x$

La première intégrale correspond à l'aire rouge, la seconde intégrale correspond à l'opposé de l'aire bleue. Ici comme les aires sont très proches, le calcul va donc donner un résultat proche de 0, car :

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2,8} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2,8}^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{A}(\text{rouge}) - \mathcal{A}(\text{bleue})$$

2) Et si on veut calculer l'aire ? (aire rouge + aire bleue)

Avec la définition : $\mathcal{A}(\text{rouge}) = \displaystyle\int_0^{2,8} \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x$; $\mathcal{A}(\text{bleue}) = -\displaystyle\int_{2,8}^5 \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x$; on ajoute les deux.

À l'aide de la valeur absolue : $\displaystyle\int_0^5 \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x = \int_0^5 \left|2 - \frac{x^2}{4}\right|\mathrm{d}x$

4 Calcul intégral : les formules

$$\text{1)} \boxed{\text{Intégrale définie sur } [a;b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = F(b) - F(a)}$$

Cela veut dire que si on souhaite calculer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$, il suffit de connaître une primitive F de f (n'importe laquelle), et on peut alors calculer simplement $F(b) - F(a)$. On note parfois :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Reprenons nos exemples de la première page :

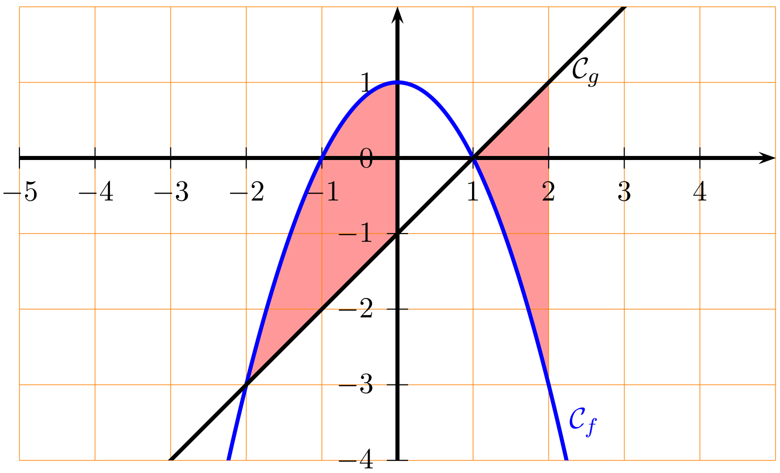
1. on avait considéré la fonction $f(x) = 5$ sur l'intervalle $[0,5;3]$ et on avait trouvé : $\int_{0,5}^3 f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{0,5}^3 5\,\mathrm{dx} = 12,5\,;$
2. on avait considéré la fonction $g(x) = 2x + 1$ sur l'intervalle $[1;3]$ et on avait trouvé : $\int_1^3 g(x)\,\mathrm{dx} = \int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{dx} = 10.$

Avec la formule, on retrouve bien évidemment pareil.

1. Pour $f(x) = 5$, une primitive est $F(x) = 5x$. Du coup il faut calculer $F(3) - F(0,5)$: $\int_{0,5}^3 5\,\mathrm{dx} = [5x]_{0,5}^3 = (5 \times 3) - (5 \times 0,5) = 15 - 2,5 = 12,5\,;$
2. Pour $g(x) = 2x + 1$, une primitive est $G(x) = x^2 + x$. Du coup il faut calculer $G(3) - G(1)$: $\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{dx} = [x^2 + x]_1^3 = (3^2 + 3) - (1^2 + 1) = 12 - 2 = 10.$

$$\text{2)} \boxed{\text{Aire entre deux courbes sur } [a;b] : \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{dx}}$$

Exemples avec les fonctions $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = x - 1$, si on demande l'aire suivante :



On calcule alors $\int_{-2}^0 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{dx} + \int_1^2 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{dx}$

La calculatrice donne comme résultat $\boxed{\frac{31}{6}}$. Cela fait un peu plus que 5, on peut vérifier graphiquement que l'aire fait effectivement environ 5 unités d'aire (ici, 5 carreaux puisque le graphique est gradué de 1 en 1 sur les deux axes).