Ce document reprend l'activité d'introduction au chapitre 3 (primitives, intégrales). On a fait cette activité d'introduction le mercredi 29 novembre.

De nombreux phénomènes physiques sont explicables par les mathématiques. Il suffit d'avoir un modèle mathématique qui explique ce qu'il se passe, puis de dérouler les calculs.

On a la chance d'avoir une loi physique qui nous permet de modéliser la trajectoire de certains objets : la gravité. Supposons donc qu'on souhaite savoir le temps que met un crayon à tomber par terre, quand on le lâche depuis une certaine hauteur.

Quand le crayon est en chute libre, la seule force qui s'exercice sur lui est la pesanteur. On peut alors écrire, en simplifiant, que

$$a(t) = -9,81$$

Or on l'a vu en cours, l'accélération, c'est la dérivée de la vitesse. Comment retrouver la vitesse ? Il faut donc trouver une fonction qui, quand je la dérive, donne $-9,81$. On voit que la fonction $-9,81t$ fonctionne. Mais $-9,81t+3$ aussi, $-9,81t+27$ aussi, $-9,81t+123$ aussi... car quand on dérive une constante, ça donne 0. Comment savoir quelle est la fonction de la vitesse ? De manière générale, la vitesse s'écrit donc

$$v(t) = -9,81t + c$$

où c est une constante à déterminer. Ici, puisque, à $t = 0$, je lâche le crayon, c'est donc que sa vitesse initiale, $v(0)$, est égale à 0 (je le tenais jusqu'alors, et je viens de le lâcher). Mais $v(0) = -9,81\times 0+c = c$. C'est donc que $c = 0$. Je sais maintenant que

$$v(t) = -9,81t$$

On voulait connaître la hauteur du crayon (ce qui correspond à la position du crayon, puisqu'il ne bouge que verticalement). Or on sait que la dérivée de la position, c'est la vitesse. Donc on cherche une fonction $h(t)$ qui, dérivée, donne $-9,81t$.

Cette fois-ci c'est plus difficile : on sait que c'est du t^2 qui, dérivé, va donner du t, car quand on dérive t^2, ça donne $2t$. Du coup, pour obtenir $-9,81t$, il faut dériver $-9,81\times\frac{t^2}{2}$. Et comme auparavant, si cette expression fonctionne, alors $-9,81\times\frac{t^2}{2}+3$ aussi, $-9,81\times\frac{t^2}{2}+32$ aussi, etc. Finalement, on sait que la hauteur s'écrit donc :

$$h(t) = -9,81\times\frac{t^2}{2} + d$$

où d est une constante, pas forcément la même que c précédemment. Puisque, à $t = 0$, j'ai lâché le crayon de ma main, il avait une hauteur environ de 2 m. Ce qui fait que $h(0) = 2$. Mais $h(0) = -9,81\times\frac{0^2}{2}+d = d$. Du coup, $d = 2$. On a donc la fonction hauteur :

$$h(t) = -9,81\times\frac{t^2}{2} + 2$$

Notre question initiale était de savoir combien de temps il faudrait au crayon pour toucher terre. Eh bien, cela revient à résoudre $h(t) = 0$.

$$\begin{aligned}
-9,81\times\frac{t^2}{2}+2 &= 0 && \\
-9,81\times\frac{t^2}{2} &= -2 && -2\\
-9,81\times t^2 &= -4 && \times 2\\
t^2 &= \frac{-4}{-9,81} && \div -9,81\\
t &= \pm\sqrt{\frac{4}{9,81}} && \text{Racine carrée}
\end{aligned}$$

Et, c'est bien sûr la solution positive, $t = \sqrt{\dfrac{4}{9,81}} \approx 0,64$. Le crayon tombe par terre après environ $0,64$ s.

Ce qu'il faut retenir de cette introduction, c'est qu'on a vu qu'il pouvait être utile de faire à l'envers l'opération de la dérivée. C'est ce qu'on appelle faire des calculs de primitive. Dans le formulaire S6–S7 http://www.barsamian.am/EE_docs_officiels/S6S7P3_Formulaire_maths_2022-beyond.pdf, à la page 2, il y a un tableau des primitives usuelles. On s'est servis de la première case : on a utilisé une primitive de 1, qui est x (formule avec $n = 0$), puis une primitive de x, qui est $\dfrac{x^2}{2}$ (formule avec $n = 1$). La formule reste vraie ensuite, donc pour faire le calcul d'une primitive de x^2, c'est $\dfrac{x^3}{3}$ (formule avec $n = 2$), pour faire le calcul d'une primitive de x^3, c'est $\dfrac{x^4}{4}$ (formule avec $n = 3$).