Exercice 1 — Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive puis toutes les primitives.

Exemple : si $f(x) = 2x + 3$, alors $F(x) = x^2 + 3x$ est une primitive de f, et toutes les primitives de f sont de la forme $x^2 + 3x + k$, où k est une constante (un nombre réel).

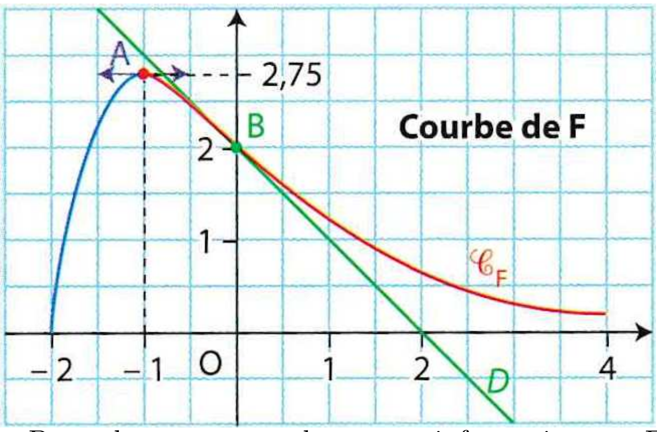
1. $f(x) = 4x^3 - 3$
2. $f(x) = 0$
3. $f(x) = \pi + x$
4. $f(x) = -9,81$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
6. $f(x) = \mathrm{e}^0$
7. $f(x) = 2x \times x + x \times x \times x$
8. $f(x) = a^2x + b$
9. $f(x) = 2,2\mathrm{e}^x + 1,5$
10. $f(x) = \dfrac{5}{3}x^3$
11. $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2$
12. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 1$

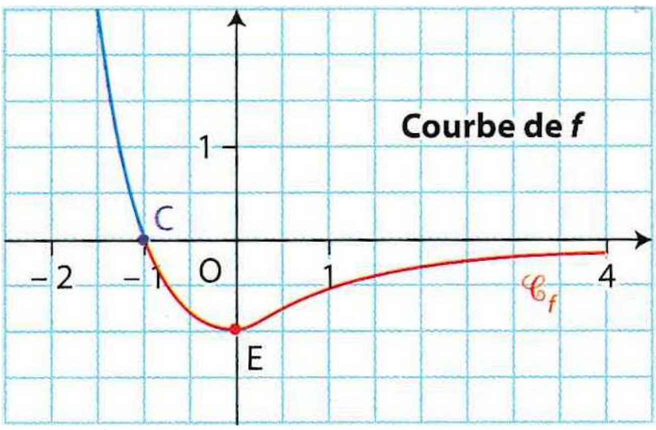
Exercice 2 — Remplir le tableau suivant (plusieurs réponses sont parfois possibles) :

Fonction f	Fonction $g = f'$	Fonction $h = g'$
$f(x) = 3x$		
	$g(x) = \mathrm{e}^x$	
	$g(x) = 2x$	
		$h(x) = 3$
$f(x) = 3\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{6}x^2$		
		$h(x) = 2x + 1$
	$g(x) = 1,5x^2$	

Exercice 3

Un élève a élaboré la fiche méthode ci-dessous où il tire des conséquences pour une fonction f à partir d'informations lues sur l'une de ses primities F et inversement.





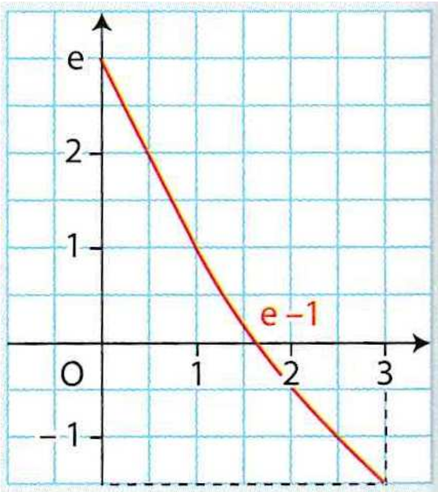
Dans chaque cas, on donne une information sur F et une information sur f. Recopier et compléter.

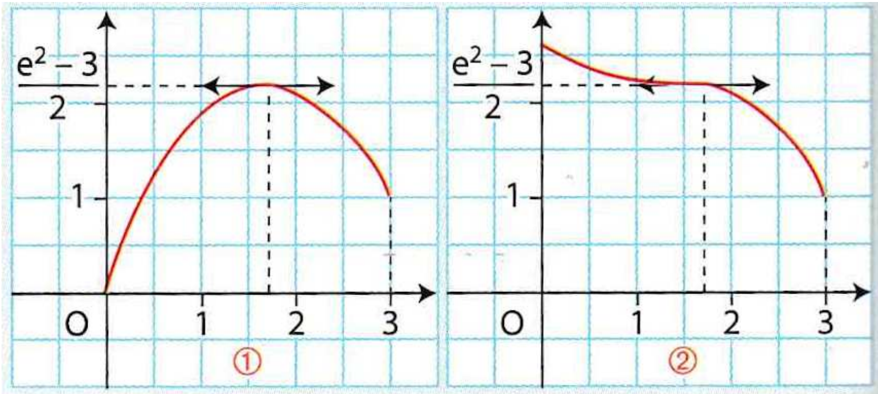
1. La tangente en A à $\mathcal{C}_F$ est horizontale donc $F'(-1) = 0$.
   $f(-1) = 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point C$(-1; 0)$.
2. La tangente en B à $\mathcal{C}_F$ est la droite … donc $F'(\ldots) = \ldots$.
   … donc la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par ….
3. F est croissante sur $[-2; -1]$ donc $F' \geq 0$ sur $[-2; -1]$.
   $f \geq 0$ sur $[-2; -1]$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ ….
   F est décroissante sur … donc ….
   … donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est … de (Ox) sur ….

Exercice 4

Voici la courbe (sur la gauche) représentative d'une fonction f définie sur $[0;3]$.

1. Donner le tableau de signes de la fonction f sur $[0;3]$.
2. On note F une primitive de f sur $[0;3]$. Laquelle des courbes ci-dessous (à droite) est la représentation graphique d'une fonction F ?





Exercice 5

f et F sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

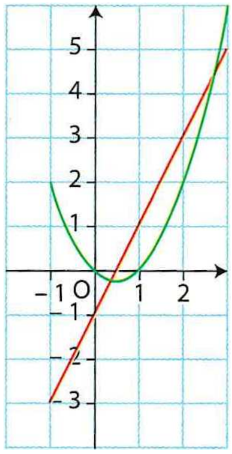
$f(x) = x^2 - 4x$ et $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Écrire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Dans le repère ci-contre, on a représenté deux fonctions f et g respectivement par une parabole et une droite.

L'une est une primitive de l'autre. Laquelle ?



Exercice 7 — Tiré du 40 p.127

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer <u>la</u> primitive F de f vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$ données.

1. $f(x) = x^3$, avec $x_0 = -2$ et $y_0 = 0$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$, avec $x_0 = 1$ et $y_0 = \dfrac{5}{6}$

Exercice 8

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer <u>une</u> primitive puis <u>la</u> primitive F qui vérifie la condition donnée.

1. $f(t) = -9,81t$ avec $F(0) = 20$.
2. $f(x) = \mathrm{e}x + 3$ avec $F(1) = \dfrac{\mathrm{e}}{2} + 3$

Exercice 9 : Coût marginal

Pour une entreprise qui fabrique des objets, le coût total C_T dépend du nombre x d'objets fabriqués. En général $C_T(x)$ n'est pas proportionnel à x. On conçoit par exemple qu'il peut y avoir des frais fixes, et que souvent, pour diminuer le coût de fabrication d'un objet, on a intérêt à fabriquer un grand nombre d'objets. On appelle coût marginal, noté $C_m(x)$, le coût de fabrication du $(x+1)$-ème objet.

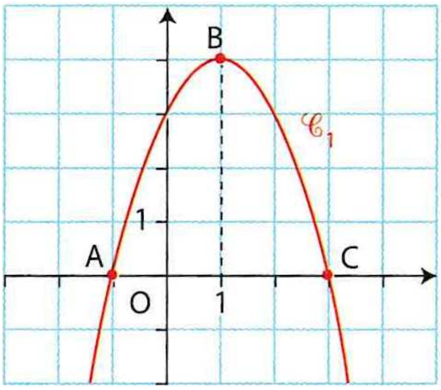
On admet que $C_T'(x) = C_m(x)$. Ainsi le coût total C_T est une primitive du coût marginal C_m.

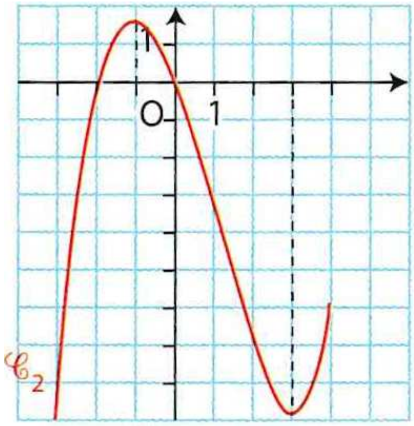
Interprétation de $C_T(0)$: pour $x = 0$, $C_T(0)$ est le montant des frais fixes. Ainsi la connaissance du montant des frais fixes permet de déterminer <u>la</u> primitive du coût marginal correspondant à la production étudiée.

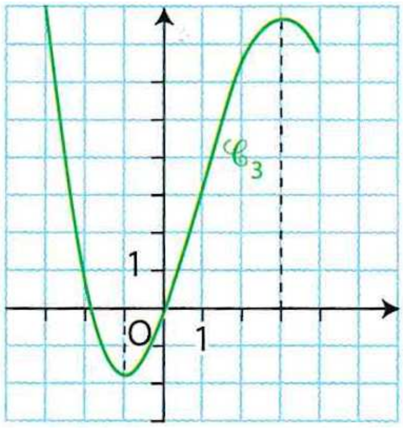
Le coût marginal C_m d'un produit est donné, en fonction de la quantité x produite, par la relation $C_m(x) = 6x^2 - 100x + 300$; ce coût est exprimé en euros. Les frais fixes s'élèvent à 500 euros.
Si on note $C_T(x)$ le coût total de fabrication de x objets, on a donc $C_T(0) = 500$.
Calculer, en fonction de x, le coût total de fabrication de x objets.

Exercice 10

f est une fonction définie sur $[-3;4]$. Les points $A(-1;0)$, $B(1;4)$ et $C(3;0)$ appartiennent à la courbe de f donnée ci-dessous (à gauche). Parmi les deux courbes suivantes (à droite), laquelle est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f ?







Exercice 11 — Calculatrice uniquement

On considère la fonction f définie par $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x$. Soit $\mathcal{C}_f$ son graphique dans un repère orthonormé.

1. Donner une esquisse de la courbe.
2. Déterminer les coordonnées exactes des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.
3. Déterminer les coordonnées exactes du point de $\mathcal{C}_f$ représentant l'extremum de f et préciser sa nature.
4. Lire graphiquement la limite de f en $-\infty$.
5. Déterminer les intervalles sur lesquels f est croissante ou décroissante.
6. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$.

Exercice 12 — À la main

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3\ln(x)$. Soit $\mathcal{C}_f$ son graphique dans un repère orthonormé.

1. Donner une esquisse de la courbe.
2. Déterminer le domaine de définition de f.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.
4. Déterminer les intervalles sur lesquels f est croissante ou décroissante.
5. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$.

Exercice 13

Calculer $a = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{t} + 1 - \mathrm{e}^t\right) \mathrm{d}t$ et $b = \displaystyle\int_0^1 \left(3\mathrm{e}^{2x+1} + x\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 14

On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x+2}$, pour tout $x > -2$. Déterminer la primitive F de f telle que $F(3) = 0$.

Exercice 15

On considère la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x + 3$. Établir une équation de la tangente au graphique de f au point d'abscisse 0.

Exercice 16

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{x} + 1$.

1. Calculer l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.
2. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0,5$ et $x = 1$.

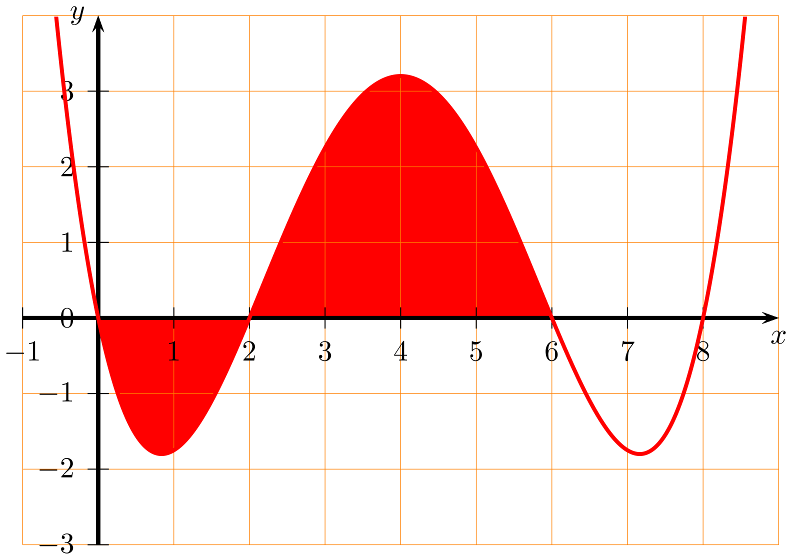
Exercice 17

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4e^x$.

1. Calculer l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 0$.
2. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 18

La figure ci-dessous représente une fonction f, dont les racines sont 0, 2, 6 et 8.



1. Écrire avec des intégrales le calcul qu'il faudrait faire pour obtenir l'aire rouge. On ne demande pas de faire ce calcul.
2. En s'aidant du quadrillage, donner une valeur approchée de l'aire rouge.

Exercice 19

On considère la fonction h définie par $h(x) = 2x$. Déterminer $\displaystyle\int_{-5}^{-1} h(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 20

La moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$, se calcule grâce à la formule $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3$. Calculer la moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0;5]$.

y

Exercice 21

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f. Par la méthode des rectangles, avec les rectangles à gauche et les rectangles à droite, calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.