Chapitre 3.
Primitives et intégrales

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2023–2024

Plan du chapitre

- Calcul de primitives
- Notion d'intégrale : méthode des rectangles, lien avec les primitives
- Calculs d'intégrales

Si f est une fonction, on note F une primitive de f. Le calcul d'une primitive de f, est l'opération inverse du calcul de dérivée (c'est-à-dire que $F' = f$).

Exemple : quand on dérive $3x$ ça donne 3 donc $f(x) = 3x$ est une primitive de $g(x) = 3$.

Remarque : quand on dérive une constante, ça fait toujours 0. Ainsi, il n'y a pas une unique fonction qui est primitive d'une fonction donnée.

Exemple : soit $f(x) = 6x + 4$.

- Si on dérive $g(x) = 3x^2 + 4x$, on trouve $6x + 4$, donc g est une primitive de f ;
- et si on dérive $h(x) = 3x^2 + 4x + 12$, on trouve aussi $6x + 4$, donc h est une autre primitive de f.

Le formulaire (`http://www.barsamian.am/EE_docs_officiels/S6S7P3_Formulaire_maths_2022-beyond.pdf`) donne les formules pour le calcul d'une primitive F de f (c'est-à-dire $F' = f$) :

Une primitive de $f(x) = x^n$ (pour $n \geq 0$)

Si $f(x) = x^n$, alors $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Par exemple :

- si $f(x) = x$, alors $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$
- si $f(x) = x^2$, alors $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$
- si $f(x) = x^3$, alors $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$

Le formulaire (`http://www.barsamian.am/EE_docs_officiels/S6S7P3_Formulaire_maths_2022-beyond.pdf`) donne les formules pour le calcul d'une primitive F de f (c'est-à-dire $F' = f$) :

Une primitive de $f(x) = \mathrm{e}^x$

Si $f(x) = \mathrm{e}^x$, alors $F(x) = \mathrm{e}^x$.

Par exemple :

- si $f(x) = \mathrm{e}^x + 3$, alors $F(x) = \mathrm{e}^x + 3x$
- si $f(x) = 2\mathrm{e}^x + 4x$, alors $F(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x^2$
- si $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - 1$, alors $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - x$

Le formulaire (`http://www.barsamian.am/EE_docs_officiels/S6S7P3_Formulaire_maths_2022-beyond.pdf`) donne les formules pour le calcul d'une primitive F de f (c'est-à-dire $F' = f$) :

Une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $F(x) = \ln(x)$.

Par exemple :

- si $f(x) = \dfrac{1}{x} - 3$, alors $F(x) = \ln(x) - 3x$
- si $f(x) = \dfrac{3}{x} + 5x$, alors $F(x) = 3\ln(x) + \dfrac{5}{2}x^2$
- si $f(x) = \sqrt{2}\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{3}$, alors $F(x) = \sqrt{2}\ln(x) - \dfrac{2}{3}x$

Une fois qu'on a trouvé <u>une</u> primitive F :

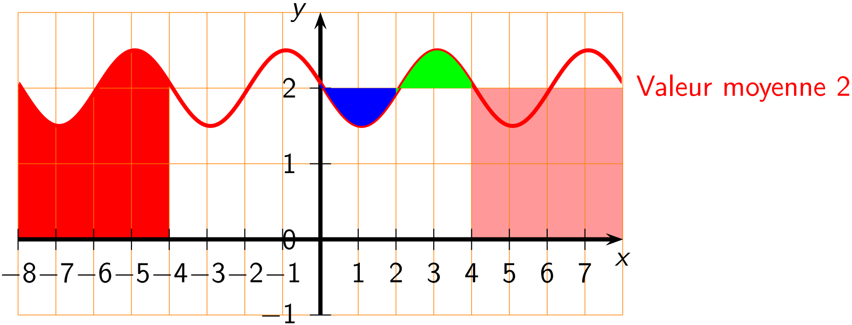
Toutes les primitives

Soit f une fonction dont on connaît une primitive F. Alors toute primitive de f a pour expression $F(x) + C$ où C est une constante réelle ($C \in \mathbb{R}$).

<u>Remarque</u> : ce résultat est plus fort que ce qu'on a vu précédemment : il n'y a <u>pas d'autre</u> primitive que les fonctions d'expression $F(x) + C$!

On a vu l'an dernier la valeur moyenne d'une fonction périodique.

Ex. en rouge, $x \mapsto 0,5\sin\left(\frac{2\pi}{4}x+3\right)+2$:

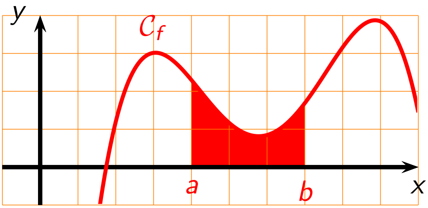


L'aire bleue et l'aire verte sont égales, donc l'aire rouge foncé (tout à gauche) qui est l'aire « sous la courbe » (pour x entre -8 et -4) est la même que l'aire rouge clair (tout à droite) qui est l'aire d'un rectangle de hauteur 2 (et de même largeur que tout à gauche : 4).

Pour calculer la valeur moyenne d'une fonction f, il faut répartir la « somme » de f de manière égale, donc trouver une fonction constante qui ait la même aire sous la courbe : il faut donc trouver un rectangle de même aire, comme à la page précédente.

Le symbole pour la « somme » d'une fonction est $\displaystyle\int$ (le « S » de somme, allongé). Le calcul $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire comprise entre :

- la courbe $\mathcal{C}_f$
- l'axe (Ox)
- la droite d'équation $x = a$
- la droite d'équation $x = b$



II/ Aire sous la courbe

Pour le calcul de moyenne d'une fonction f (comme pour d'autres exemples), il faut donc calculer l'aire sous la courbe de f. Pour avoir un calcul approché, on peut utiliser la méthode des rectangles (voir activité 1 p.140).

Pour avoir un calcul exact, il faut utiliser le théorème suivant :

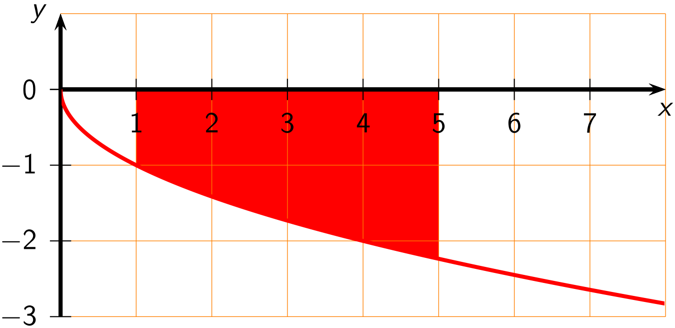
Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction, a un nombre (dans le domaine de f). On note $\mathcal{A}(t)$ l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses, de $x = a$ à $x = t$. Alors $\mathcal{A}$ est une primitive de f.

Ce théorème fondamental fait donc le lien entre un calcul d'aire et une primitive (on a vu un exemple avec l'activité 2 p.141 et on a vu une ébauche de démonstration en classe).

Tout ce qu'on a vu jusqu'ici n'est valable que pour une fonction positive. Essayez de calculer à la calculatrice :

$$\int_1^5 -\sqrt{x}\,\mathrm{dx}$$



En regardant sur le dessin, on voit que ça doit correspondre à l'opposé de l'aire rouge. Effectivement, dans ce cas, c'est l'aire « sur » la courbe (car l'axe (Ox) est au-dessus).

Et quand la fonction est à la fois positive et négative sur l'intervalle considéré, on utilise la relation de Chasles :

Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ex. $\displaystyle\int_0^5 2 - \frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x$ correspond à :

$$\int_0^{2,8} 2 - \frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x + \int_{2,8}^5 2 - \frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x$$

La première intégrale correspond à l'aire rouge, la seconde intégrale correspond à l'opposé de l'aire bleue.