Exercice 1 **7.5 points**

Le tableau suivant donne l'évolution de la population turque z, en millions d'habitants, pendant les années 2000 de rang x allant de 0 à 9 (les données pour l'année 2006 sont manquantes).

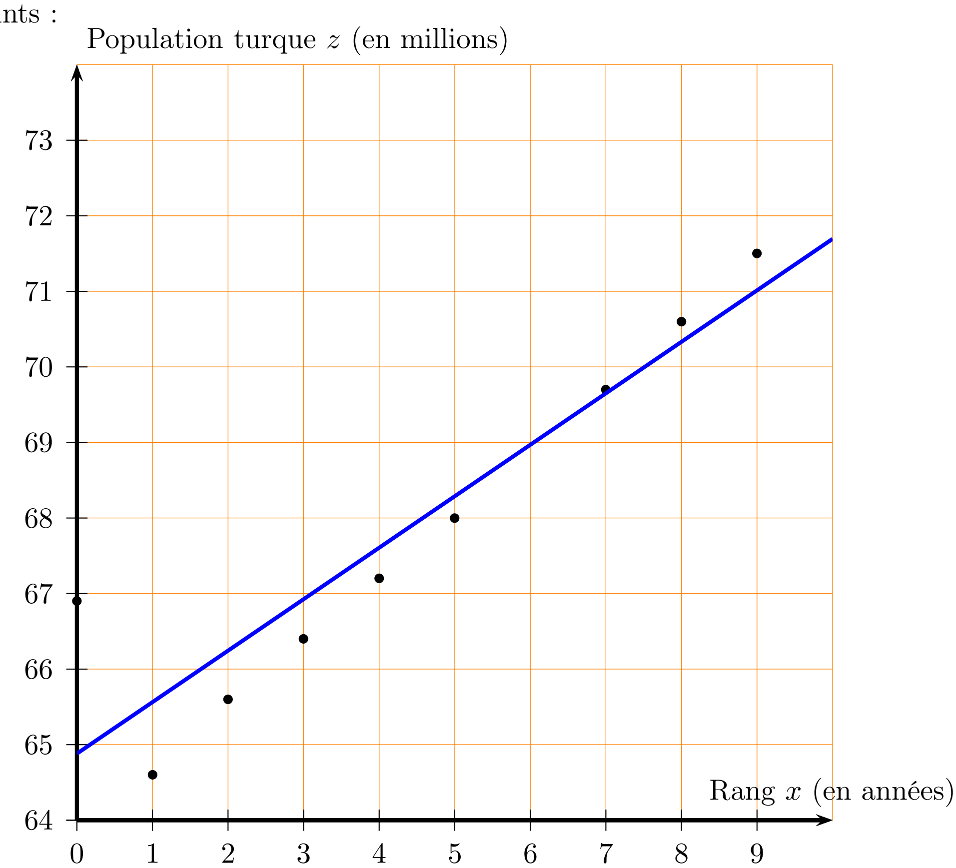
Années	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2007	2008	2009
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	7	8	9
Population turque z_i	66,9	64,6	65,6	66,4	67,2	68	69,7	70,6	71,5

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique à deux variables (x, z). — 2 points

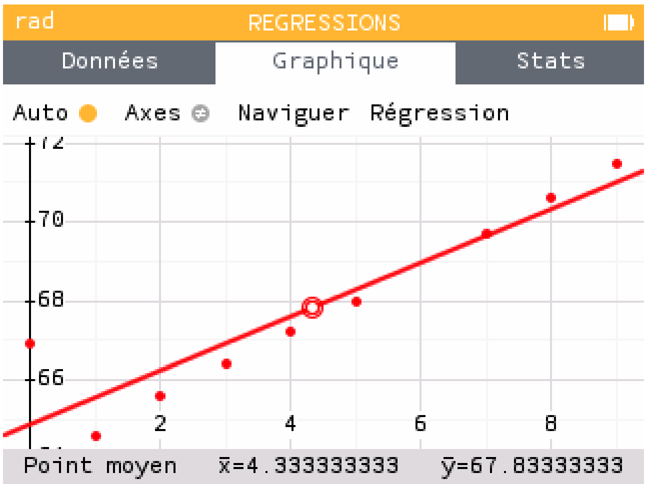
On souhaite réaliser une régression de z en x.

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire. Une régression affine est-elle une bonne idée ? — 1 point
3. Déterminer l'équation de la droite des moindres carrés pour la régression de z en x. Rajouter cette droite sur le graphique. — 2 points
4. À l'aide du modèle de la question précédente, donner une valeur probable de la population turque en 2006. Avez-vous fait une interpolation ou une extrapolation ? — 1.5 point
5. La population allemande est stable depuis les années 2000, aux alentours de 82 millions d'habitants. Si on suppose que l'évolution observée des populations allemande et turque se poursuit les années suivantes, en quelle année pourrait-on prévoir que la population de la Turquie pourrait dépasser celle de l'Allemagne ? — 1 point

1. Le nuage de points :



2. On rentre les données dans l'outil statistiques / régression de la calculatrice, et on trouve à peu près $\boxed{r \approx 0,925}$. La régression affine est donc tout à fait une bonne idée.
3. La calculatrice donne $\boxed{z = 0,68125x + 64,88125}$.



4. Si on remplace x par 6, on obtient (en appuyant sur « Prédiction sachant x ») : $z = 0,68125 \times 6 + 64,88125 = 68,96875$, ce qui est donc une $\boxed{\text{interpolation}}$ qui donne une valeur probable de la population turque en 2006 de $\boxed{68,96875 \text{ millions d'habitants}}$.
5. Ici c'est à l'envers on connait $z = 82$ et on veut trouver la valeur de x. Si on remplace z par 82, on obtient (en appuyant sur « Prédiction sachant y ») : $x \approx 25$, soit $\boxed{\text{en } 2025}$.

Exercice 2 **2.5 points**

Soient les fonctions g et G définies par $$g(x) = 3x^2 - 3x + 1 \qquad \text{et} \qquad G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$ où les paramètres a, b, c et d sont quatre nombres réels.	
1. Déterminer la valeur des nombres a, b et c pour que $G' = g$.	2 points
2. À l'aide des nombres trouvés à la question précédente, déterminer la valeur de d pour que $G(2) = 5$	0.5 point

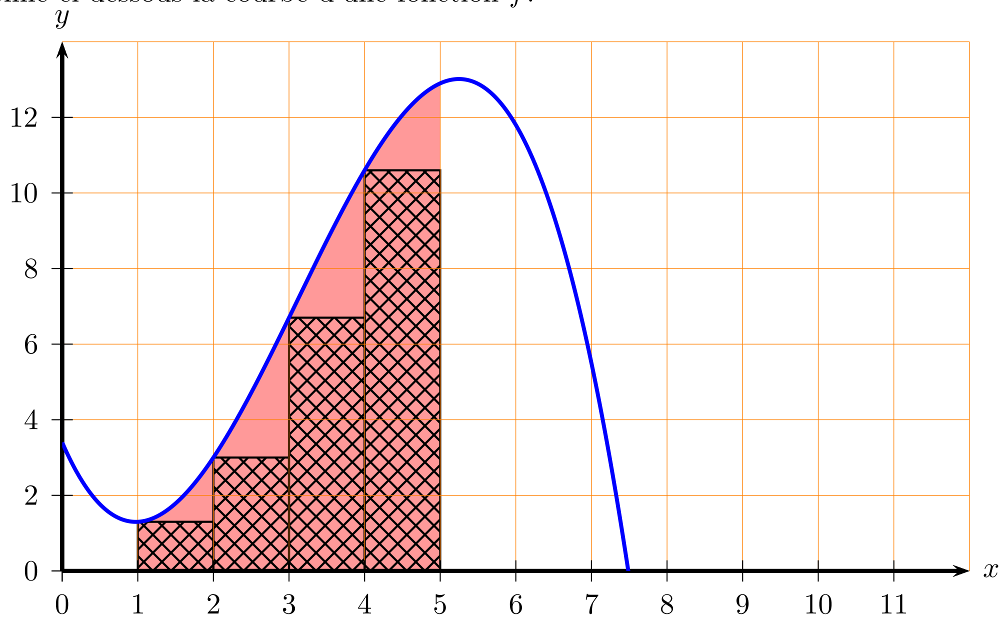
1. On demande une primitive de g, c'est ici $G(x) = x^3 - \dfrac{3x^2}{2} + x$, c'est-à-dire $\boxed{a = 1}$, $\boxed{b = -\dfrac{3}{2}}$ et $\boxed{c = 1}$.

   Sinon, on pouvait partir à l'envers avec l'égalité de l'énoncé, et calculer la dérivée de G, pour trouver les valeurs des trois nombres.
   $G'(x) = a \cdot 3x^2 + b \cdot 2x + c = 3ax^2 + 2bx + c$.
   Or on veut que $3ax^2 + 2bx + c = 3x^2 - 3x + 1$ et on peut donc identifier chaque coefficient :
   $$\begin{cases} 3a = 3 \\ 2b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$
   Cela donne bien sûr le même résultat.
2. On cherche maintenant la primitive de g qui vaut 5 quand x vaut 2. Il faut donc trouver d pour que $2^3 - \dfrac{3 \times 2^2}{2} + 2 + d = 5$. On résout :
   $8 - 6 + 2 + d = 5$, c'est-à-dire $\boxed{d = 1}$.

Exercice 3 — BONUS

<table>
<tr>
<td>

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f.



Par la méthode des rectangles à gauche, avec des rectangles de largeur 1, calculer une valeur approchée de

$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{dx}$$

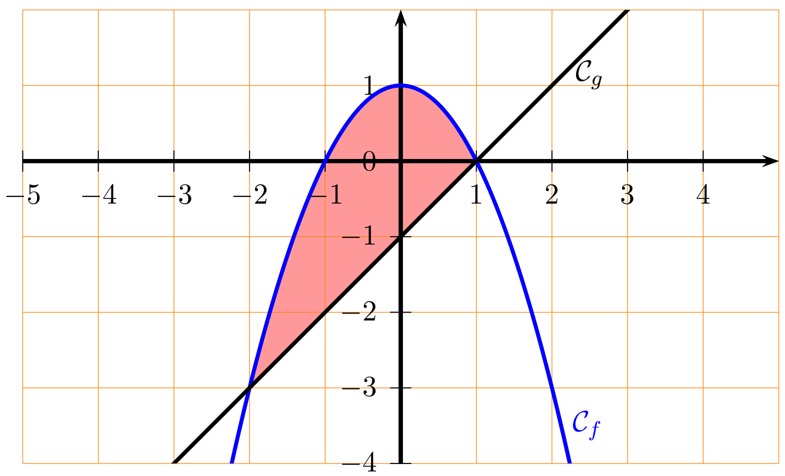
</td>
<td>0,5 point</td>
</tr>
</table>

On a représenté l'aire qui correspond à $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{dx}$ en rouge (la fonction est positive donc l'intégrale correspond à l'aire), et on a également représenté les 4 rectangles dont il faut se servir. On trouve alors que l'aire des rectangles à gauche est environ égale à :

$1 \times 1,3 + 1 \times 3 + 1 \times 6,7 + 1 \times 10,6 = \boxed{21,6}$.

Exercice 4 — BONUS

Les fonctions $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = x - 1$ sont tracées ci-dessous. 1 point



Exprimer l'aire rouge comme un calcul intégral utilisant les fonctions f et g.

Donner une valeur approchée de l'aire rouge à 2 décimales près.

L'aire rouge se calcule comme $\boxed{\int_{-2}^{1} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x}$.

La calculatrice donne $\boxed{4,5}$.