Exercice 59 des annales : Pre baccalaureat janvier 2023 (Luxembourg) Calc. : ✗

	Lorsqu'un gâteau est sorti du four, il refroidit dans la cuisine, où la température est de 24 degrés Celsius. La température T du gâteau (en degrés Celsius) après le temps t (en minutes) peut être calculée avec la formule : $$T(t) = 24 + 200 \cdot \mathrm{e}^{\ln(0,5)\cdot t}$$
1 point	a) **Calculer** la température du gâteau juste à sa sortie du four.
2 points	b) **Calculer** la température du gâteau 2 minutes après sa sortie du four.
2 points	c) **Déterminer** la température du gâteau à long terme. **Justifier** votre réponse.

a) Lorsque le gâteau sort juste du four, cela correspond à $t = 0$. On calcule $T(0) = 24 + 200 \cdot \mathrm{e}^{\ln(0,5)\cdot 0} = 24 + 200 \cdot \mathrm{e}^0 = 24 + 200 \cdot 1 = 24 + 200 = 224$. Ainsi la température du gâteau était de $\boxed{224°\text{C}}$.

b) 2 minutes après sa sortie du four, cela correspond à $t = 2$. On calcule $T(2) = 24 + 200 \cdot \mathrm{e}^{\ln(0,5)\cdot 2} = 24 + 200 \cdot \left(\mathrm{e}^{\ln(0,5)}\right)^2 = 24 + 200 \cdot (0,5)^2 = 24 + 200 \cdot 0,25 = 24 + 50 = 74$. Ainsi la température du gâteau était de $\boxed{74°\text{C}}$.

c) On a vu à la question b) que la température du gâteau décroit. Effectivement, on peut réécrire $T(t) = 24 + 200 \cdot \mathrm{e}^{\ln(0,5)\cdot t} = 24 + 200 \cdot \left(\mathrm{e}^{\ln(0,5)}\right)^t = 24 + 200 \cdot (0,5)^t$. On voit donc que la fonction correspond à 24 plus une fonction exponentielle décroissante (de base $0,5$ avec $0 < 0,5 < 1$. La fonction exponentielle, à long terme (quand $t \to +\infty$), a une limite de 0, donc la fonction T, puisqu'on ajoute 24 a une limite de 24. Ainsi la température du gâteau à long terme sera de $\boxed{24°\text{C}}$.

Exercice 60 des annales : Pre baccalaureat janvier 2023 (Luxembourg) Calc. : ✗

	Soit la fonction $f(x) = \ln(x)$.
2 points	a) **Donner** le domaine et les limites de cette fonction.
2 points	b) **Déterminer** le point sur le graphique de $f(x)$ où la tangente à la courbe sera parallèle à la droite $y = 3x - 2$.
1 point	c) **Classer** les expressions suivantes de la plus petite à la plus grande : $$\ln 1, \qquad \ln \mathrm{e}^2, \qquad \mathrm{e}^0, \qquad -\ln \mathrm{e}$$

a) La fonction ln est définie sur $\boxed{]0;+\infty[}$ (sur les réels strictement positifs). Il faut ensuite donner les limites de la fonction aux bords de ce domaine, donc en 0 et en $+\infty$. Les limites de ln sont $\boxed{-\infty \text{ en } 0}$ et $\boxed{+\infty \text{ en } +\infty}$.

b) La droite d'équation $y = 3x - 2$ a une pente de 3. Deux droites sont parallèles quand elles ont la même pente. On veut donc que la tangente à $\mathcal{C}_f$ ait une pente de 3, donc on cherche où $f'(x) = 3$. On sait que la dérivée de ln est définie par $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

On veut donc résoudre $\dfrac{1}{x} = 3$ ce qui donne $x = \dfrac{1}{3}$ (on cherche un nombre x dont l'inverse est 3).

Il nous faut maintenant le point du graphique, c'est donc $\boxed{\left(\dfrac{1}{3}; \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)}$.

c) On sait que $\ln 1 = 0$, $\ln \mathrm{e}^2 = 2$, $\mathrm{e}^0 = 1$, et $-\ln \mathrm{e} = -1$. Du coup :

$$\boxed{-\ln \mathrm{e} < \ln 1 < \mathrm{e}^0 < \ln \mathrm{e}^2}$$