Exercice 67 des annales : Baccalauréat juin 2023 — Calc. : ✗

	On est en train de vider une piscine et le volume d'eau qui reste peut être modélisé par la fonction V donnée par $$V(t) = 5\ 000 \cdot 0,60^t, \qquad t \geq 0,$$ où le temps t est mesuré en heures et $V(t)$, mesuré en litres, est le volume d'eau restant à l'instant t. La vidange de la piscine commence à l'instant $t = 0$.
2 points	a) **Déterminer** le volume d'eau dans la piscine au départ et après 1 heure.
2 points	b) **Calculer** en pourcentage le taux auquel le volume d'eau diminue par heure.
1 point	c) **Expliquer** ce que le modèle nous révèle à propos du volume d'eau restant après un temps très long.

a) On calcule $V(0) = 5\ 000 \cdot 0,60^0 = \boxed{5\ 000}$, puis $V(1) = 5\ 000 \cdot 0,60^1 = 5\ 000 \cdot 0,6 = 500 \times 10 \times 0,6 = 500 \times 6 = \boxed{3\ 000}$.

b) Ici on a une fonction exponentielle de base $0,6$. On peut réécrire $0,6 = 1 - 0,4$ ce qui correspond à une baisse de $\boxed{40\% \text{ par heure}}$ (multiplier par $0,6$, c'est baisser de 40%).

c) Sur un temps très long, cela correspond à la limite quand $t \to +\infty$. Puisqu'on a une fonction exponentielle décroissante, cette limite est donc 0. Le volume d'eau restant sur un temps très long selon ce modèle sera $\boxed{\text{nul}}$.

Exercice 79 des annales : Baccalauréat juin 2023 (sujet de réserve) — Calc. : ✗

	Dans une exploitation agricole, la production de blé P en kg par hectare peut être modélisée par $$P(t) = 6\ 000 \cdot \mathrm{e}^{-\ln(2)\cdot t},$$ où t est le nombre d'années après 2022.
2 points	a) **Calculer** la production de blé en 2023 selon ce modèle.
3 points	b) **Déterminer** en quelle année la production de blé sera de 1 500 kg par hectare selon ce modèle.

a) Si t est le nombre d'années après 2022, alors en 2023 c'est $t = 1$. On calcule $P(1) = 6\ 000 \cdot \mathrm{e}^{-\ln(2)\cdot 1} = 6\ 000 \cdot \mathrm{e}^{-\ln(2)} = 6\ 000 \cdot \mathrm{e}^{\ln(2)\cdot(-1)} = 6\ 000 \cdot \left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\right)^{-1} = 6\ 000 \cdot 2^{-1} = 6\ 000 \cdot \frac{1}{2} = 3\ 000$. La production de blé en 2023 est de $\boxed{3\ 000 \text{ kg / ha}}$.

b) Si on refait le calcul du a) avec t, on obtient $P(t) = 6\ 000 \cdot \mathrm{e}^{-\ln(2)\cdot t} = 6\ 000 \cdot \mathrm{e}^{\ln(2)\cdot(-1)\cdot t} = 6\ 000 \cdot \left(\left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\right)^{-1}\right)^t = 6\ 000 \cdot \left(2^{-1}\right)^t = 6\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$.
On a donc une fonction exponentielle de base $0,5$, ce qui veut dire que ça divise par 2 à chaque année. Du coup, ça atteindra 1 500 kg par hectare en 2 ans, en $\boxed{2024}$. On peut vérifier que $P(2) = 1\ 500$.

5 points	Un appartement est proposé à la location. Le propriétaire propose deux manières de calculer le loyer : Choix A : Le montant du loyer est de 1 000 € au départ, et augmente de 25 € chaque année. Choix B : Le montant du loyer est de 1 000 € au départ, et augmente de 2% par an. a) Calculer le montant du loyer la deuxième et la troisième année pour l'option A. b) Calculer le montant du loyer la deuxième et la troisième année pour l'option B. c) Modéliser par une fonction $f(x)$, le montant du loyer mensuel pour le choix A en fonction des années x. d) Modéliser par une fonction $g(x)$, le montant du loyer mensuel pour le choix B en fonction des années x. e) Expliquer quel choix vous feriez à long terme.

a) Pour l'option A, le 2e loyer est de $\boxed{1\ 025€}$ et le 3e loyer de $\boxed{1\ 050€}$.

b) Pour l'option B, c'est un peu plus technique :
le 2e loyer, en euros, est de $1\ 000 + 2\% \cdot 1\ 000 = 1\ 000 + 20 = \boxed{1\ 020}$;
le 3e loyer, en euros, est de $1\ 020 + 2\% \cdot 1\ 020 = 1\ 020 + 20,4 = \boxed{1\ 040,4}$.

c) Pour l'option A, on augmente de 25 chaque année donc on obtient $f(x) = \boxed{1\ 000 + 25 \cdot x}$.

d) Pour l'option B, on augmente de 2% chaque année donc on obtient $g(x) = 1\ 000 \cdot (1 + 2\%)^x = \boxed{1\ 000 \cdot 1,02^x}$.

e) À long terme, l'augmentation exponentielle finira par être plus rapide, donc on choisit plutôt $\boxed{\text{l'option A}}$. Cela dit, on peut aussi dire qu'à long terme, on préférera peut-être devenir propriétaire plutôt que rester locataire toute sa vie ! On ne pouvait pas le faire à la main, mais la résolution à la calculatrice dit qu'il faut attendre la 23e année pour que le loyer de l'option A devienne plus intéressant. Et encore, si on ne considère pas seulement le loyer lors de l'année mais la somme des loyers depuis le début, il faut la 36e année pour que l'option A soit plus intéressante. On peut donc raisonnablement mettre en doute la théorie sur cet exemple précis et répondre que le long terme est déraisonnable.