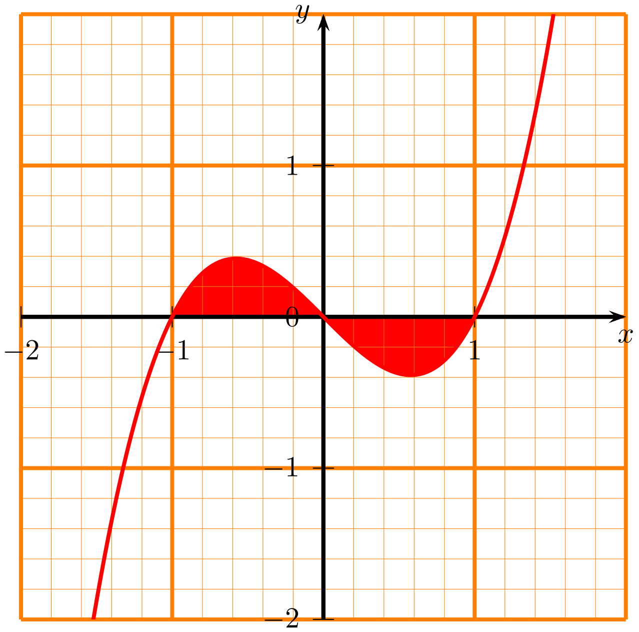
Exercice 1

	Le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x$ est donné ci-dessous : 
2 points	1. On considère la fonction $F(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2$. Trouver les valeurs de a et de b pour que $F' = f$.
3 points	2. Calculer l'aire entre le graphe de f et l'axe x des abscisses (représentée en rouge).

1. On demande une primitive de f, c'est ici $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2}$.
2. L'aire (en rouge, ci-dessus) peut être calculée en deux fois, car il y a deux parties : (a) à gauche, entre -1 et 0, où la fonction est positive et (b) à droite, entre 0 et 1, où la fonction est négative.

   La fonction est positive sur $[-1; 0]$ donc l'aire à gauche vaut $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{dx}$. La fonction est négative sur $[0; 1]$ donc l'aire à droite vaut $\displaystyle -\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}$. Au total, l'aire rouge vaut donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{dx} - \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}$.

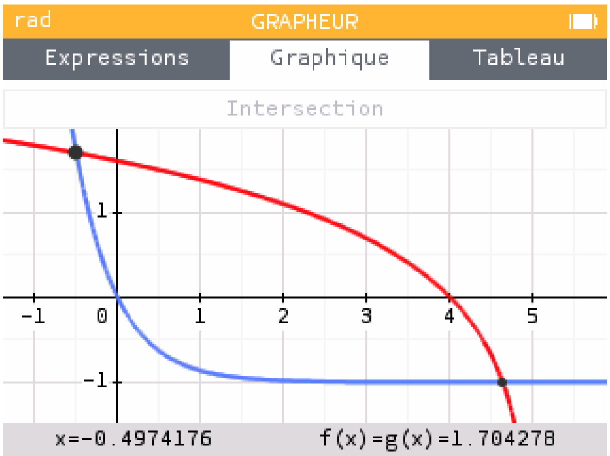
   Pour calculer cette valeur, on va donc utiliser une primitive de la fonction f, pour appliquer la formule du formulaire de l'intégrale (et on va donc utiliser la primitive calculée en 1)).

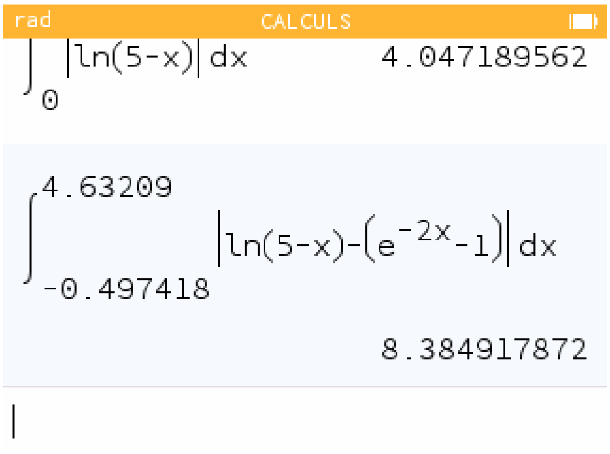
   L'aire vaut donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{dx} - \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{dx} = (F(0) - F(-1)) - (F(1) - F(0))$
   $= \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right)\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}\right)\right) = \left(0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 0\right) =$
   $\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

   On pouvait vérifier son calcul en regardant sur le dessin une valeur approchée de l'aire : l'aire de gauche vaut approximativement l'aire du triangle OAB, soit $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{0,4 \times 1}{2} = 0,2$. L'aire de droite vaut également environ $0,2$ (aire du triangle OCD), donc on trouve bien une aire approchée de $0,4$ ce qui est cohérent avec la valeur $0,5$ qu'on a trouvée par le calcul.

Exercice 2

	Étant données les fonctions : $f(x) = \ln(5-x)$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-2x} - 1$
3 points	1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre les graphes de f et g. Arrondir à 3 décimales.
2 points	2. Esquissez les graphes des deux fonctions dans le même repère, pour $-1 \leq x \leq 5$.
2 points	3. Calculer l'aire de la région délimitée entre le graphe de la fonction f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.
3 points	4. Calculer l'aire de la région délimitée entre les graphes des deux fonctions f et g.





1. On rentre $f(x) = \ln(5-x)$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-2x}-1$ dans le menu graphique de la calculatrice. Pour trouver les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on va dans le menu Calcul puis Rechercher et Intersection, on voit alors les points d'intersection entre les deux courbes. La calculatrice nous montre les points $\boxed{(-0,497; 1,704) \text{ et } (4,632; -1,000)}$.

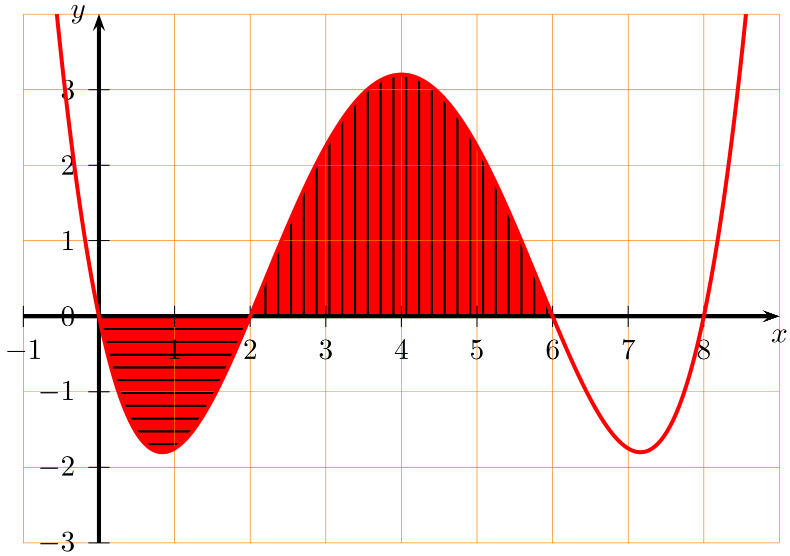
   Sinon avec l'outil Equations, on tape $\ln(5-x) = \mathrm{e}^{-2x} - 1$, la calculatrice répond que c'est en $x \approx -0,497418$ et $x \approx 4,63209$; avec cette méthode on a les abscisses des points d'intersection, mais pas les coordonnées complètes. Il faut calculer l'image de ces nombres. La calculatrice donne $f(-0,497418) \approx 1,70428$ et $f(4,63209) \approx -0,999905$ (on retrouve bien la même chose).

2. On revient dans le menu graphique, on va dans le tableau de valeurs pour recopier le graphique.

3. Ici, l'aire à calculer entre la courbe de f et l'axe des abscisses se trouve entre $x = 0$ et $x = 4$. Donc, on peut simplement taper à la calculatrice :
   $\displaystyle\int_0^4 |f(x)|dx \approx \boxed{4,047}$.

4. Ici, l'aire à calculer entre la courbe de f et la courbe de g se trouve entre $x \approx -0,497418$ et $x \approx 4,63209$ (voir question 1). Donc, on peut simplement taper à la calculatrice :
   $\displaystyle\int_{-0,497418}^{4,63209} |f(x) - g(x)|dx \approx \boxed{8,385}$.

Exercice 3 — Exercice 18 de la feuille d'exercices du chapitre.

	La figure ci-dessous représente une fonction f, dont les racines sont 0, 2, 6 et 8. 
3 points	1. Écrire avec des intégrales le calcul qu'il faudrait faire pour obtenir l'aire rouge. On ne demande pas de faire ce calcul.
2 points	2. En s'aidant du quadrillage, donner une valeur approchée de l'aire rouge.

1. La fonction est négative sur $[0;2]$ donc l'aire hachurée horizontalement vaut $-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{dx}$. La fonction est positive sur $[2;6]$ donc l'aire hachurée verticalement vaut $\int_2^6 f(x)\,\mathrm{dx}$. Au total, l'aire rouge vaut donc $\boxed{-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{dx} + \int_2^6 f(x)\,\mathrm{dx}}$.
2. L'aire hachurée horizontalement est à peu près égale à 3 carreaux, l'aire hachurée verticalement à peu près égale à 8 carreaux, donc a à peu près $\boxed{\text{11 carreaux}}$ en tout.