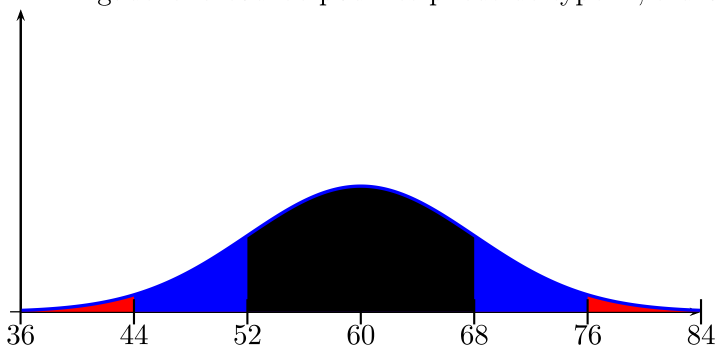
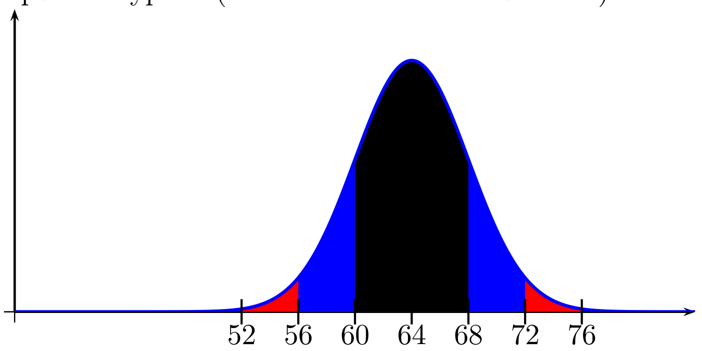
Exercice 123 des annales : Sujets d'exemple, 2022 Calc. : ✗

5 points	Pour une longue route, la voiture doit être impeccablement révisée. Le garagiste recommande de changer les pneus. Il existe deux types de pneus, et vous vous demandez quelle distance chacun des deux types peut permettre de parcourir. La distance que les pneus de type A peuvent parcourir est normalement distribuée avec une moyenne de 60 000 km et un écart-type de 8 000 km, alors que la distance que les pneus de type B peuvent parcourir est normalement distribuée avec une moyenne de 64 000 km et un écart-type de 4 000 km. **Étudier** le type de pneus à choisir si vous voulez obtenir la plus grande probabilité de parcourir au moins 52 000 km avec vos pneus.

À gauche la courbe pour les pneus de type A, à droite pour le type B (axes en milliers de kilomètres) :





Sur chaque figure, on a représenté en noir la partie qui correspond aux valeurs dans l'intervalle $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$, partie qui a donc une probabilité d'environ $0,68$.

Sur le graphique de gauche, si on note X la variable aléatoire associée au kilométrage d'un pneu de type A, on lit $P(X \geq 52\ 000) \approx 0,68 + \dfrac{0,32}{2} = \boxed{0,84}$. Effectivement, la partie noire de la courbe correspond à $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0,68$. La partie non noire sous la courbe a donc une aire d'environ $0,32$, et seule la moitié à droite (pour $X \geq 68\ 000$) est à considérer.

Sur le graphique de droite, si on note Y la variable aléatoire associée au kilométrage d'un pneu de type B, on lit $P(Y \geq 52\ 000) \approx 0,997 + \dfrac{0,003}{2} = \boxed{0,9985}$. Effectivement, les parties rouge / bleu / noire de la courbe correspondent à $P(\mu-3\sigma \leq Y \leq \mu+3\sigma) \approx 0,997$. La partie non coloriée sous la courbe a donc une aire d'environ $0,003$, et seule la moitié à droite (pour $Y \geq 76\ 000$) est à considérer.

Au final, $P(X \geq 52\ 000) \approx 0,84$ (type A) et $P(Y \geq 52\ 000) \approx 0,9985$ (type B) donc ce sont $\boxed{\text{les pneus de type B}}$ qui ont la plus grande probabilité d'avoir une durée supérieure ou égale à 52 000 km.

Exercice 124 des annales : Exemples du syllabus, 2021 Calc. : ✗

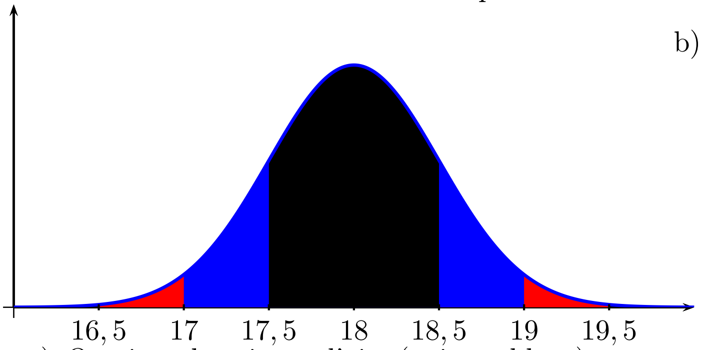
2 points	1. **Interpréter** ce que désigne l'espérance d'une variable aléatoire.
1 point	2. X est une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ. **Indiquer** une probabilité tenant compte de ces deux valeurs caractéristiques μ et σ.
2 points	3. Une variable aléatoire continue Y définie sur $\mathbb{R}$ est telle que $P(a \leq Y \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$. **Expliquer** pourquoi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = 1$.

1. L'espérance d'une variable aléatoire est la moyenne des valeurs que prend cette variable aléatoire pondérées par leurs probabilités.
2. Le recueil de formules indique 3 probabilités possibles, il suffit d'en recopier une :
   - $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0,68$
   - $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0,95$
   - $P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0,997$
3. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,\mathrm{d}z$ correspond à $P(-\infty < Z < +\infty)$, probabilité pour Z de prendre toutes les valeurs réelles possibles. Z désignant une variable aléatoire définie sur $\mathbb{R}$, cette probabilité est donc celle de l'événement certain, d'où la valeur 1.

Exercice 125 des annales : Baccalauréat 2023 Calc. : ✗

	Une machine produit des billes d'acier. Le diamètre des billes suit une distribution normale de moyenne $\mu = 18,0$ mm et d'écart-type $\sigma = 0,5$ mm. On choisit une bille au hasard.
1 point	a) **Déterminer** la probabilité que son diamètre soit compris entre 17, 0 mm et 19, 0 mm.
2 points	b) **Déterminer** la probabilité que son diamètre soit compris entre 17, 0 mm et 18, 5 mm.
2 points	c) On prélève au hasard un lot de 400 billes d'acier dans cette production et on mesure le diamètre de chaque bille. Si le diamètre d'une bille est inférieur à 17, 0 mm, elle est rejetée. **Estimer** combien de billes seront rejetées.

On note X la variable aléatoire qui correspond au diamètre d'une bille. L'énoncé correspond à :

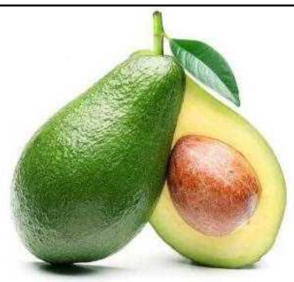


a) $P(17,0 \leq X \leq 19,0) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx \boxed{0,95}$. La probabilité que le diamètre de la bille soit entre 17,0 mm et 19,0 mm est égale à environ 0,95.

b) $P(17 \leq X \leq 18,5) = P(17 \leq X \leq 17,5) + P(17,5 \leq X \leq 18,5)$ (partie noire + partie bleue de gauche)
On sait que l'aire noire vaut environ 0, 68 et l'aire (noire + bleue) vaut environ 0, 95. Ainsi, l'aire bleue correspond à environ $0,95 - 0,68 = 0,27$. Donc l'aire bleue de gauche vaut environ $\dfrac{0,27}{2} = 0,135$ (par symétrie). Cela correspond donc au calcul $P(17,0 \leq X \leq 18,5) \approx 0,68 + 0,135 = 0,815$.

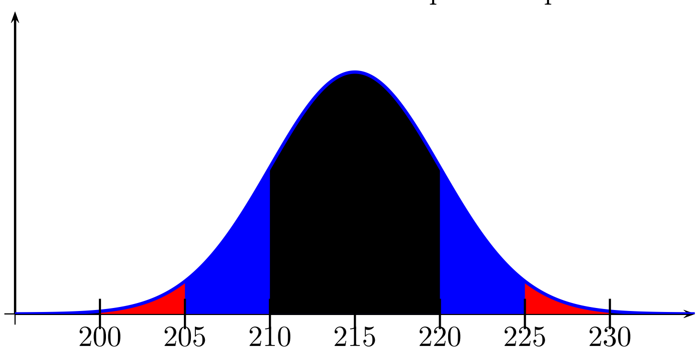
c) On vient de voir que l'aire (noire + bleue) vaut environ 0, 95. Ainsi le reste de l'aire vaut environ 0, 05. Ici on considère $P(X \leq 17)$ qui vaut donc la moitié (par symétrie) de cette valeur, soit $P(X \leq 17) \approx 0,025$ ou 2, 5%. Finalement, on peut estimer que 2, 5% des 400 billes, soit $\boxed{\text{10 billes}}$, seront rejetées.

Exercice 126 des annales : Baccalauréat 2023 (sujet de réserve) Calc. : ✗

	L'étude réalisée en 1984 par la « California Avocado Society » sur plus de deux cent vingt-cinq millions d'avocats a déterminé que la masse des avocats est normalement distribuée, avec une moyenne de 215 grammes et un écart type de 5 grammes. Seuls les avocats pesant entre 210 et 225 grammes sont considérés comme aptes à la vente. 
3 points	a) **Montrer** que 81,5% des avocats sont aptes à la vente.
2 points	b) **Déterminer** la probabilité qu'un avocat pèse plus de 215 grammes, étant donné qu'il est apte à la vente. Donner la réponse sous la forme d'une fraction de nombres entiers.

a) On est ici exactement dans la même situation que la question b) de l'exercice 125, on trouve 81, 5% de la même manière.

b) On note X la variable aléatoire qui correspond à la masse d'un avocat. L'énoncé correspond à :



Si on note A = « l'avocat est apte à la vente » et B = « $X \geq 215$ », alors on demande $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$.
Or l'événement A∩B est l'événement « $210 \leq X \leq 225$ et $X \geq 215$ » c'est-à-dire $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = 215 \leq X \leq 225$.
$P(215 \leq X \leq 225) = P(215 \leq X \leq 220) + P(220 \leq X \leq 225)$ (parties noire / bleue à droite de l'axe de symétrie). On sait que l'aire noire vaut environ 0, 68 (donc à droite de l'axe de symétrie il y a 0, 34) et l'aire (noire + bleue) vaut environ 0, 95. Ainsi, l'aire bleue correspond à environ $0,95 - 0,68 = 0,27$. Donc l'aire bleue de droite vaut environ $\dfrac{0,27}{2} = 0,135$ (par symétrie). Cela correspond donc au calcul $P(215 \leq X \leq 225) \approx 0,34 + 0,135 = 0,475$. On peut donc conclure que $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \approx \dfrac{0,475}{0,815} = \boxed{\dfrac{475}{815}}$.