Exercise 1 Calc. : ✓

Les températures moyennes par mois ont été enregistrées en 2002 au Grand-Duché de Luxembourg. On sait que janvier 2002 a été le mois le plus froid avec $1,6$řC et que la température moyenne la plus élevée a été mesurée en juin 2002 avec $18,6$řC.

1. **Justifier** qu'en Europe, les températures moyennes mensuelles pour quelques années consécutives peuvent être modélisées avec un modèle périodique. — 2 marks
2. **Donner** l'amplitude et la période de ce modèle. — 2 marks
3. **Déterminer** les paramètres a, b, c et d dans le modèle du type : — 5 marks

$$T(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$$

qui décrit les données où T est la température moyenne et x est le mois, en commençant par $x = 1$ pour janvier 2002.

Les précipitations ont été observées un jour précis en mars 2002. Les précipitations de ce jour peuvent être modélisées par la fonction R définie par :

$$R(t) = 0,002t^3 - 0,064t^2 + 0,512t, \qquad 0 \leq t \leq 24$$

où $R(t)$ est le taux de précipitation en mm/h et t est le temps en heures.

4. **Décrire**, à l'aide d'un court texte descriptif, cette journée en termes de précipitations. La réponse doit se concentrer sur les moments où il pleut le plus et les moments où il pleut le moins. — 3 marks

Un cylindre de verre vide a été placé à l'extérieur pendant cette journée pour mesurer la quantité de pluie qui était tombée.

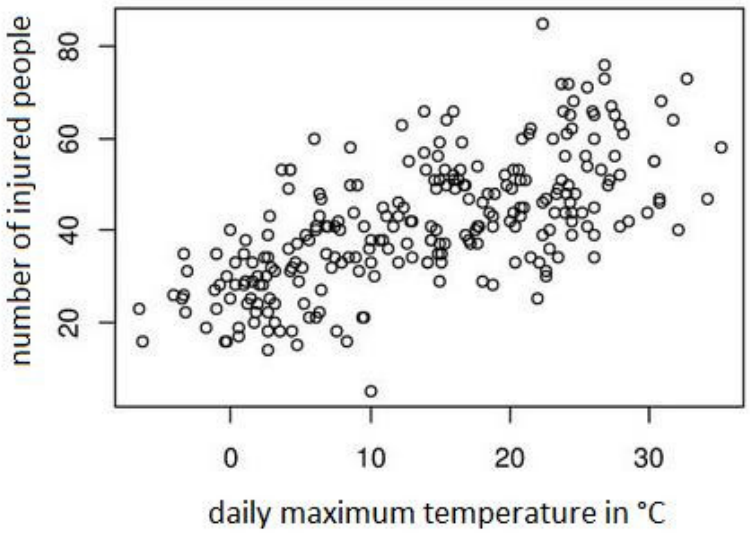
5. **Tracer** le graphique d'une fonction qui indique la hauteur de l'eau dans ce cylindre de verre. — 3 marks
6. **Calculer** la quantité totale de pluie de ce jour en millimètres (mm). — 2 marks

L'année 2002 a connu 195 jours de pluie et 170 jours sans pluie au Grand-Duché de Luxembourg. On peut supposer que tous les jours ont la même probabilité d'être un jour de pluie. Un an plus tard, les météorologues veulent savoir s'il y a eu plus de pluie en 2003. Malheureusement, certaines données ont été perdues et ils ne disposent que d'un petit échantillon de 30 jours consécutifs.

7. **Calculer** la probabilité qu'il pleuve un jour choisi au hasard si l'on suppose que le nombre total de jours de pluie dans les deux années reste constant et que les jours de pluie sont également répartis sur toute l'année. — 1 mark

8. **Utiliser** un test statistique de type test d'hypothèse nulle pour déterminer combien de jours il doit pleuvoir pour que les météorologues puissent dire qu'il y a eu plus de pluie en 2003 qu'en 2002 pour un seuil de signification de 5%. — 5 marks

Le nuage de points suivant montre la température maximale et le nombre de blessés causés par les accidents de la circulation à Berlin sur une longue période.



9. **Décrire** la corrélation entre ces deux valeurs. — 1 mark

10. **Expliquer** pourquoi le nombre de blessés peut être corrélé de cette manière avec la température maximale. — 1 mark

Exercise 2 Calc. : ✓

Un jour donné dans un centre de test Covid-19, 19 personnes présentant des symptômes ont été testées et 6 d'entre elles ont eu un résultat positif. Le même jour, 87 personnes sans symptôme ont été testées dont 85 ont eu un résultat négatif.

1. **Montrer** que la probabilité d'obtenir un résultat positif dépend du fait qu'une personne présente ou non des symptômes. — 2 marks

Pour protéger les données personnelles, les échantillons de tests sont étiquetés avec un code formé de deux lettres (choisie dans l'alphabet de 26 lettres) et quatre chiffres (de 0 à 9). Les mêmes lettres et chiffres peuvent être choisis plus d'une fois.

2. **Calculer** le nombre total de codes différents pouvant être créés avec ce système. — 2 marks

Après plusieurs mois, les statistiques ont montré que 1,7% des personnes sans symptôme sont testées positives. Une entreprise comptant 20 employés (tous sans symptôme) demande à tous ses employés de se faire tester.

3. **Donner** deux hypothèses, qui doivent être faites pour modéliser cette situation avec une distribution binomiale. — 2 marks

4. **Calculer** la probabilité qu'au moins un des employés soit testé positif. — 3 marks

Une autre entreprise située dans un autre pays envoie également tous ses employés passer un test Covid-19. On suppose que la situation peut être modélisée par une distribution binomiale donnée par la formule

$$B(84; 0,02; k) = \binom{84}{k} \cdot 0,02^k \cdot 0,98^{84-k}.$$

5. **Interpréter** les valeurs 84, $0,02$ et $0,98$ dans le contexte donné. — 3 marks

Le 5 mars 2020, un homme de retour d'Italie est la première personne au Grand-Duché de Luxembourg à avoir été testée positive au Covid-19. Ce jour est donc marqué comme le jour 0 dans la statistique. Le tableau suivant montre le nombre total de personnes infectées enregistrées au Luxembourg dans les jours qui ont suivi l'apparition du premier cas.

Jour	0	1	2	3	4	5	6
Nombre	1	3	4	5	5	7	7

6. **Tracer** un nuage de points de ces valeurs ainsi qu'un modèle de régression linéaire et un modèle de régression exponentiel. — 3 marks

7. **Donner** les équations qui décrivent les deux modèles de régression de la question 6. — 2 marks

8. **Expliquer** pourquoi il est difficile de décider, à ce stade précoce, si la propagation du virus est mieux modélisée par un modèle linéaire ou par un modèle exponentiel. — 2 marks

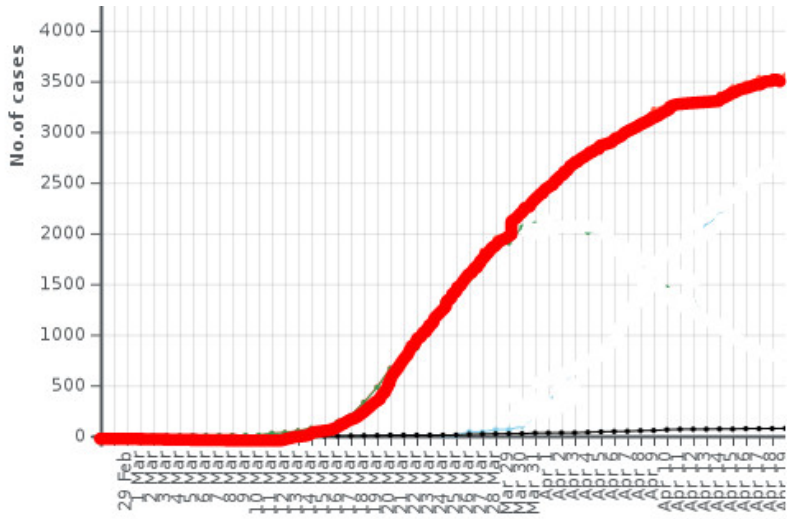
Après sept jours supplémentaires, d'autres modèles A et B ont été proposés pour faire de meilleures prédictions, où t est donné en jours :

$$A(t) = 1,35567 \cdot 1,46977^t \qquad B(t) = 12,4396 \cdot t - 34,8571$$

Au 16ème jour, 670 cas de Covid-19 ont été enregistrés au Grand-Duché de Luxembourg.

9. **Calculer** le nombre prévisionnel de personnes infectées le 16ème jour avec le modèle A, puis avec le modèle B et **comparer** ces nombres avec le nombre réellement observé. **Décider** du modèle le mieux adapté à cette situation et **justifier** la réponse. — 2 marks

Le diagramme suivant montre l'évolution du nombre total d'infections enregistrées pour les quatre premières semaines au Grand-Duché de Luxembourg.



10. **Donner** deux raisons possibles pour lesquelles la courbe s'aplatit à un stade ultérieur. — 2 marks

La courbe peut être modélisée par la fonction C définie par

$$C(t) = \frac{3404}{1 + 193 \cdot e^{-0,233 \cdot t}}$$

11. **Déterminer** le jour où le taux d'infection est le plus élevé. — 2 marks

Exercise 3 Calc. : ✓

The S7 year group at a European School, containing 150 pupils, is to be represented on the Pupil's Committee for their school. There are to be 5 pupils from this year group chosen to represent the year. Of the 150 pupils, 60 are male.

1. **Calculate** the probability of choosing one male pupil at random from this year group. — 1 mark

To better represent the pupil population a questionnaire is given to each member of the S7 year group. It is noted that of the 150 pupils, 30 take their lunch at the canteen and the rest have lunch at the local shopping mall. 8 male pupils take their lunch at the canteen.

2. **Determine** the probability that given a non-male pupil is chosen they have their lunch at the mall. — 3 marks

At the same school all year groups are proportionally represented based on their year group size. In the Pupils' Committee there are the following members:

Year group	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Number	4	6	4	5	4	6	5

3. From the Pupils' Committee they need to select a group of 5 pupils to represent them at a European Schools conference.

   Determine how many different ways there are of selecting 3 pupils from S7 and 2 pupils from S6 from the Pupils' Committee. — 3 marks

4. The lower school (S1 to S3) are planning an activity. 3 members of the Pupils' Committee from S1, S2 and S3 form a group to plan this activity.

   Calculate the probability that if the members are selected at random the 3 members come from different year groups. — 5 marks

A large country is having its General Election. It is known that 30% of the population will vote for the Turquoise Party.

5. **Justify** why the expected value may differ from the actual value. — 2 marks

A group of 20 people from the population are chosen at random.

6. From this group 5 are asked who they will vote for.

   Determine the probability that at least 2 of them will not vote for the Turquoise Party. — 6 marks

In one particular country the voter turnout has been seen to be following an exponential model. The data for the voter turnout is:

Year	1989	1994	1999	2004	2009
Turnout %	74	67	60	54	49

In the following question you will be asked to determine a suitable model and apply this model.

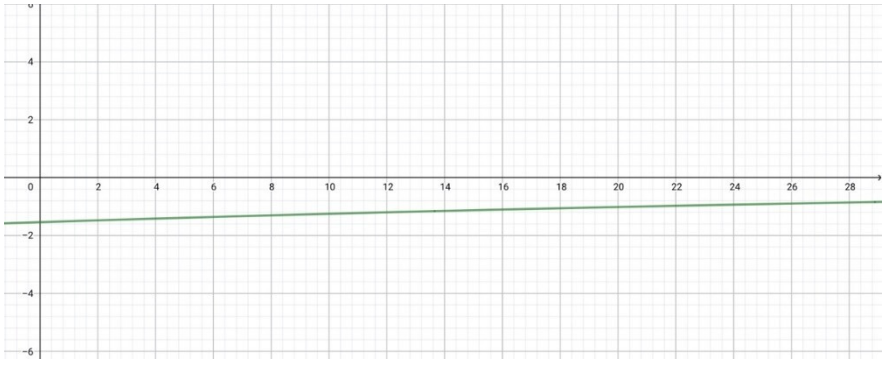
7. **Justify** fully which of the following would be the most suitable model to apply to this data and then **determine** the year when the rate at which the turnout decreases is less than -0.9% between elections years. 5 marks

   A: $f(x) = 74.056 \cdot (0.979411)^x$

   B: $f(x) = 0.979411x + 74.056$

   C: $f(x) = (0.979411)^x$

   You may find the following useful in your answer. The following shows the derivative function of the exponential model.



Exercise 4 Calc. : ✓

Part I, II and III can be answered independent of one another

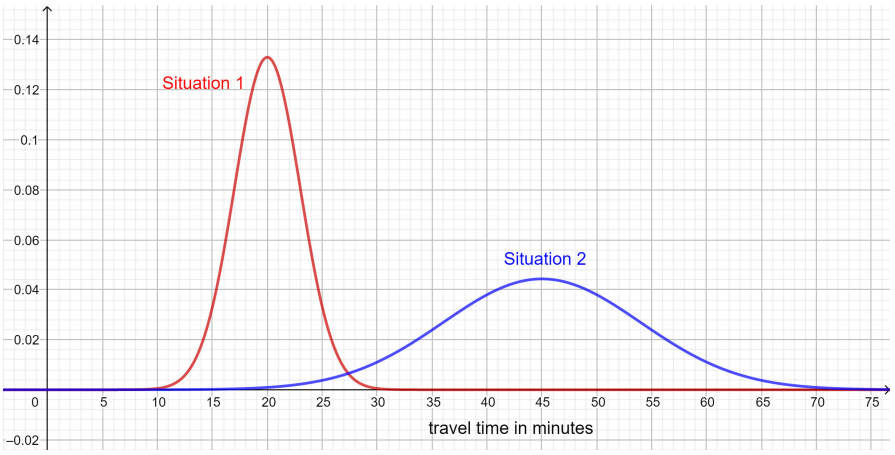
Part I

21 friends decide to meet up for dinner. Because of traffic, the probability of a friend arriving on time is 1/3. It is assumed that each friend arrives on their own.

1. **Calculate** the probability of exactly 12 friends out of 21 arriving on time for dinner. — 4 marks
2. These friends reunite again many times in the same conditions. **Determine** the average number of friends present on time at these events. — 3 marks

Part II

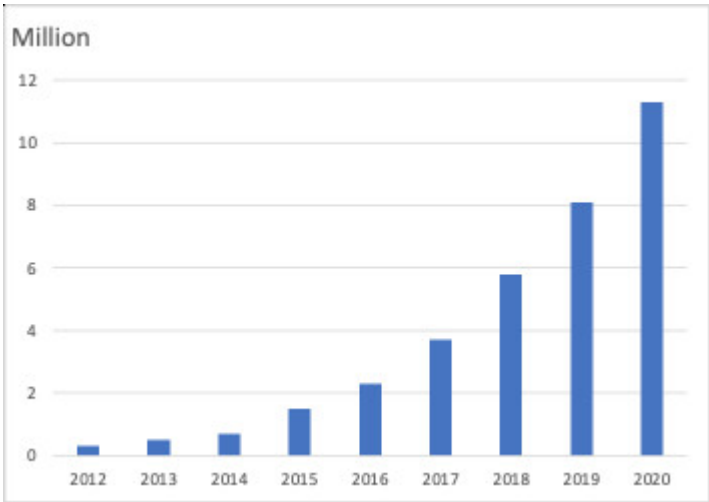
The analysis of the road speed databases shows the big variability in the time distribution of the movement of cars within a big agglomeration. The following graphs show this variability of distribution of time for the motorway. Each of these graphs correspond to the time it takes to travel 20 km at two different hours of the day.



3. **State** the type of the above distributions. — 1 mark
4. **Determine** which situation corresponds to the peak hours and **explain** your answer. — 2 marks
5. Models are used to predict future events and the situations above could be used as such.
   Determine which situation (Situation 1 or Situation 2) will give the most reliable prediction for your travel time and **justify** your answer. — 3 marks
6. In Situation 1, the probability that the time of the travel takes more than 25 minutes is 0.048 (rounded to 3 decimal places).
   Find the probability that the travel time is between 15 and 25 minutes. — 3 marks

Part III

At the dinner, a discussion takes place about electric cars and how they are developed. The diagram below shows the evolution of the number of electric cars in the world from 2010 to 2020.



Source: www.iea.org

7. One of the friends, using an application, represents the situation by the function:

$$f(x) = 0.275x^2 - 2.165x + 5.415$$

with x the number of years since 2010 and $f(x)$ the number of electric cars in millions.

Determine whether the model is suitable for the years 2017 to 2020. **Justify** your answer. 3 marks

8. **Calculate** $f'(9)$ and interpret the result. 3 marks

9. The title of an article from the same source says: "Between 145 and 230 million electric vehicles in the world in 2030."

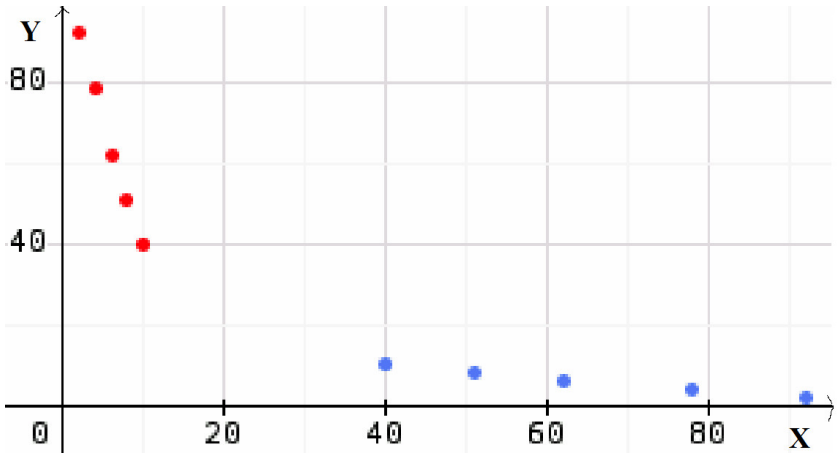
Argue whether the formula from question 7 matches the title. 3 marks

Exercise 5 Calc. : ✓

La glace carbonique (CO_2 à l'état solide) produit, à une certaine température ambiante, du gaz qui peut être facilement être vu à l'œil nu.
Le célèbre chef Sebastianic a l'intention d'utiliser 100 g de glace carbonique pour produire un effet magique pour sa dernière création, un dessert spécial. Afin de comprendre comment se comporte la glace carbonique, Sebastianic a pris plusieurs fois la masse lors de la sublimation de l'échantillon :

Temps en min (x)	2	4	6	8	10
Masse de la glace carbonique en g (y)	92	78	62	51	40

a) **Recopier** sur votre feuille le nuage de points correspondant aux données du tableau en choisissant entre le diagramme rouge ou le diagramme bleu ci-dessous : — 2 marks



b) **Donner** la valeur du coefficient de corrélation linéaire des données et **expliquer** si une telle valeur indique ou non une dépendance linéaire entre les deux variables. **Expliquez** pourquoi le coefficient de corrélation linéaire a une valeur négative. — 3 marks

c) **Établir** l'équation sous la forme $y = m \cdot x + b$ de la régression linéaire de y en x des données du tableau. — 3 marks

Donnez les nombres m et b au centième près.

Dans les questions d) et e), utilisez le modèle $y = -6,6 \cdot x + 104$.	
d) **Utilisez** le modèle pour **calculer** combien de grammes de glace carbonique sont encore présents après 13 minutes. **Expliquez** si ce modèle permet une bonne estimation pour le poids de la glace carbonique après 20 minutes.	3 marks
e) **Utilisez** le modèle pour **calculer** au bout de quelle durée la glace carbonique aura totalement disparu.	3 marks
Le chef Sebastianic est satisfait des résultats de la glace carbonique et ajoute au menu le nouveau dessert. Afin de répondre à la demande, il doit acheter de la glace carbonique. Le coût est bien décrit par la fonction : $$f(x) = (5 + x)e^{-0,12x} + 3$$ où $f(x)$ désigne le coût en euros par kilogramme de glace carbonique et x le nombre d'années depuis le début de l'année 2000 (le début de l'année 2000 correspond à $x = 0$).	
f) Sebastianic a acheté 1 kg de glace carbonique début 2023. **Déterminez** combien il a payé.	2 marks
La fonction dérivée de la fonction f est donnée par : $$f'(x) = (0,4 - 0,12x)e^{-0,12x}$$ La fonction f n'a qu'un seul extremum.	
g) **Calculez** en quelle année le coût de la glace carbonique était le plus élevé et **indiquez** ce coût en euros.	3 marks
h) **Indiquez** les intervalles pour lesquels le coût de la glace carbonique est croissant, et les intervalles pour lesquels ce coût est décroissant.	3 marks
i) **Calculer** les valeurs $f'(8)$ et $f'(20)$ qui indiquent le taux de variation du coût de la glace carbonique dans le temps, au début de l'année 2008 et au début de l'année 2020. **Déterminez** pour laquelle de ces années le prix a baissé le plus rapidement.	3 marks

Exercise 6 Calc. : ✓

Dans la première partie de cet exercice, nous étudions la cuisson d'un œuf qui vient d'être sorti d'un réfrigérateur. Un œuf est à la coque lorsque son jaune atteint une température d'exactement 45řC.

Dans les questions a), b) et c), on considère un œuf de masse 60 g. Le temps de cuisson nécessaire pour que le jaune de cet œuf atteigne la température x est donné par la relation :

$$f(x) = -16 \cdot 60^{2/3} \cdot \ln\left(\frac{100 - x}{192}\right)$$

où $f(x)$ représente le temps de cuisson en secondes et x la température en řC.

a) **Déterminez** combien de temps il faut pour que cet œuf soit à la coque. **Arrondir** à la seconde près. — 2 marks

b) **Déterminez** la température du jaune d'œuf après qu'il a cuit pendant 240 secondes. **Arrondir** au degré près. — 3 marks

c) **Dessinez** le graphique présentant le temps de cuisson $f(x)$ en fonction de la température x dans le jaune d'œuf pour des températures comprises entre 4řC et 45řC. — 4 marks

À la question d), nous considérons un œuf à la coque après un temps de cuisson de 275 secondes. L'égalité suivante s'applique à la masse m (en grammes) de cet œuf :

$$275 = -16 \cdot m^{2/3} \cdot \ln\left(\frac{55}{192}\right)$$

d) **Déterminez** la masse de cet œuf. **Arrondir** au gramme près. — 3 marks

Chaque matin d'une semaine (7 jours), un homme commande exactement un œuf. Chaque matin, la probabilité que l'œuf servi soit à la coque est de $p = 0,65$, indépendamment des autres matins. Soit X la variable aléatoire définissant le nombre d'œufs à la coque servis à cet homme pendant ces 7 matins.

e) **Montrer** que X suit une distribution binomiale, et **donner** ses paramètres. — 2 marks

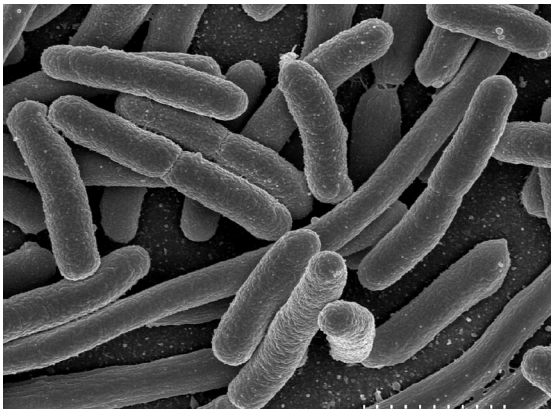
f) **Déterminez** la probabilité que cet homme n'ait reçu qu'un seul œuf à la coque au cours de ces 7 matinées. — 3 marks

g) **Déterminez** la probabilité que cet homme ait reçu des œufs à la coque pendant au moins 2 matinées au cours de cette semaine. — 3 marks

h) Nous savons que cet homme a reçu au moins deux œufs à la coque au cours de cette semaine. **Déterminez** la probabilité qu'on lui ait servi exactement trois œufs à la coque au cours de cette semaine. — 2 marks

i) **Déterminez** l'espérance et l'écart-type de la variable X. **Interprétez** ces valeurs dans le contexte. — 3 marks

Exercise 7 Calc. : ✓



Les bactéries E.coli se trouvent généralement dans la partie inférieure de l'intestin des humains et d'autres organismes à sang chaud. Elles se reproduisent à une vitesse de 3,5% par minute. Les scientifiques observent une colonie de 100 000 bactéries au début de l'expérience.

a) **Modélisez** la croissance de la bactérie E. coli sous la forme $f(t) = a \cdot b^t$. — 2 marks

où $f(t)$ représente le nombre de bactéries à un certain moment t, et t représente le temps en minutes.

Bifidobacterium est la bactérie la plus courante dans le microbiome intestinal des nourrissons. Certaines bifidobactéries sont utilisées comme probiotiques. Nous savons, grâce à des études antérieures, qu'une colonie de bifidobactéries se développe selon le modèle suivant :

$$g(t) = 200\ 000 \cdot 1,05^t$$

$g(t)$ représente le nombre de bactéries à un certain moment t.
t représente le temps en minutes.

b) i. **Calculez** le nombre de bifidobactéries à $t = 0$ et $t = 30$ à l'unité près. — 4 marks

ii. **Recopiez** et **complétez** ce tableau puis **tracez** le graphique g pour $0 \leq t \leq 5$ dans un système de coordonnées approprié. — 4 marks

t	0	1	2	3	4	5
$g(t)$						

iii. La solution nutritive de l'expérience ne peut accueillir que 10 millions de bactéries.
Calculez le moment où la colonie atteint ce nombre. On donnera la réponse arrondie à la minute prés. — 2 marks

iv. **Calculez** le taux de croissance $g'(10)$ arrondi à l'entier près et **interprétez** le résultat dans le contexte de l'exercice. — 3 marks

La maladie bactérienne des taches fruitières de la tomate est causée par la bactérie Xanthomonas vesicatoria.
L'infection provoque des taches brunes sur les feuilles et les fruits et peut entraîner des pertes de rendement importantes.
Nous savons par expérience que 2,5% de tous les plants de tomates sont infectés par la bactérie.
Un agriculteur possède un petit champ avec 500 plants de tomates.

c) i.	**Indiquez** combien de plants infectés il faut s'attendre à trouver.	2 marks
ii.	**Calculez** la probabilité que 2% des plants de tomates soient infectés.	2 marks
iii.	**Calculez** la probabilité qu'entre 10 et 20 plants (les deux nombres inclus) soient infectés.	3 marks

Exercise 8 Calc. : ✓

La municipalité de Mickey-ville évalue les données relatives aux excès de vitesse sur les routes locales par rapport au nombre de panneaux radar pédagogique installés. Le tableau suivant indique le nombre de panneaux installés et d'amendes pour excès de vitesse au cours des six dernières années :

nombre de panneaux radar pédagogique (X)	2	3	6	10	12	13
nombre d'amendes pour excès de vitesse (Y)	425	406	375	320	292	275

a) **Représentez** les données du tableau dans une nuage de points. En abscisse utilisez 1 cm pour un panneau et en ordonnée 1 cm pour 20 amendes en commençant l'échelle à partir de 180. — 3 marks

b) **Calculez** la moyenne arithmétique X_m du nombre de panneaux sur les six années. Arrondissez à $0,1$ près. — 2 marks

c) **Calculez** la moyenne arithmétique Y_m du nombre d'amendes. Arrondissez à $0,1$ près. — 2 marks

d) **Dessinez** le point central $G(X_m, Y_m)$ sur le graphique. — 1 mark

e) **Donnez** σX et σY arrondis à $0,1$ près. — 2 marks

f) **Calculez** le coefficient de corrélation linéaire et **discutez** si l'ajustement affine est correct ou non. — 2 marks

g) **Déterminez** l'équation de la droite $y = a \cdot x + b$ correspondant à un ajustement affine en utilisant la méthode des moindres carrés. Arrondissez a et b à $0,01$ près. — 2 marks

h) En utilisant l'équation de la droite $y = -13x + 450$, **estimez** le nombre d'amendes s'il y avait 15 panneaux. — 2 marks

i) Le bénéfice de l'entreprise de panneaux radar pédagogique est représenté par la fonction $B(x) = \frac{x^3}{3} - 16x^2 + 220x$, pour $0 \leq x \leq 18$ lorsqu'elle produit x centaines d'objets.

i. Quel est le bénéfice pour 900 radars vendus ? — 2 marks

ii. Combien de radars doit-on vendre pour avoir un bénéfice de 800 ? — 2 marks

iii. Quel est le bénéfice maximal ? — 2 marks

iv. Quelle est la quantité de radar correspondant à ce bénéfice maximal ? — 2 marks

j) Une usine produit des radars.

Chaque radar peut avoir deux défauts que l'on appelle défaut a et défaut b.

On prélève un radar au hasard.

On note A l'évènement ń le radar a le défaut a ż et B l'évènement ń le radar a le défaut b ż.

On admet que ces deux évènements sont **indépendants** et que leurs probabilités sont $P(\text{A}) = 0,02$ et $P(\text{B}) = 0,01$.

Un radar est défectueux lorsqu'il a au moins l'un de deux défauts.

i. **Calculez** la probabilité que le radar ne soit pas défectueux. — 2 marks

ii. Sachant que le radar prélevé est défectueux, **calculez** la probabilité qu'il ait les deux défauts. — 2 marks

Exercise 9 Calc. : ✓

Les parties 1 et 2 sont indépendantes

Partie 1

Le transport routier de passagers à Londres était de 339 601 kilomètres parcourus en 2019, soit une croissance annuelle de 4,6% par rapport à 226 913 en 2010.
Le nombre de kilomètres parcourus est modélisé par la fonction f :

$$f(x) = k \cdot A^x$$

Où $f(x)$ est le nombre de kilomètres parcourus et x le nombre d'années à partir de l'année 2010. Ainsi, $f(0) = 226\,913$ est le nombre de millions de kilomètres parcourus en 2010, $f(1)$ est le nombre de millions de kilomètres parcourus en 2011, etc.

1. **Montrer** que $A = 1,046$ et $k = 226\,913$ en justifiant. — 3 marks
2. **Écrire** la fonction f sous la forme $f(x) = k \cdot e^{a \cdot x}$, en donnant la valeur approchée du paramètre a à trois chiffres après la virgule. **Détailler** votre calcul. — 3 marks
3. **Déterminer**, pour l'année 2019, la différence entre la prévision de la formule de $f(x)$ et la valeur réelle de 339 601 kilomètres. — 3 marks
4. **Calculer** en quelle année le nombre de kilomètres sera égal à 312 000. — 2 marks
5. **Expliquer** pourquoi ce modèle ne peut pas être utilisé sur un nombre très élevé d'années. — 2 marks
6. On suppose que le nombre de kilomètres parcourus s'écrit :

   $$N = 226\,913 \times e^{0,045x}$$

   où N est le nombre de kilomètres et x le nombre d'années à partir de 2010.

   Démontrer que le nombre d'années x à partir de 2010 exprimé en fonction du nombre de kilomètres, est donné par la formule suivante : — 2 marks

   $$x = \frac{\ln\left(\frac{N}{226\,913}\right)}{0,045}$$

Partie 2

Dans la très grande métropole d'Istanbul le nombre de kilomètres en mai 2021 était de 2 500 000. Mais avec la meilleure gestion de la Covid-19, une augmentation du nombre de kilomètres est prévue. Ainsi, deux ingénieurs (ingénieur nř1 et ingénieur nř2) prédisent le nombre de kilomètres parcourus chaque mois à partir du mois de mai 2021.

Les ingénieurs prévoient ainsi les données pour les mois suivants :

Mois	**Prévisions de l'ingénieur nř1** Nombre de km parcourus	**Prévisions de l'ingénieur nř2** Nombre de km parcourus
Mai 2021	2 500 000	2 500 000
Juin 2021	2 550 000	2 537 500
Juillet 2021	2 600 000	2 575 563
Août 2021	2 650 000	2 614 196
Septembre 2021	2 700 000	2 653 409
Octobre 2021	2 750 000	2 693 210

1. **Chercher** quel ingénieur a fait un modèle linéaire et quel ingénieur a fait un modèle exponentiel. **Justifier** votre choix par des calculs. — 4 marks

2. On suppose que l'ingénieur nř2 a construit un modèle exponentiel :

   (a) **Déterminer** l'expression de la fonction exponentielle correspondante sous la forme : $h(t) = k \times A^t$ — 2 marks

   où t est le nombre de mois écoulés après mai 2021.

   (b) **Déterminer** le taux de croissance en pourcentage de ce modèle exponentiel. — 2 marks

3. Le modèle linéaire est donné par la formule : $g(t) = 2\ 500\ 000 + 50\ 000 \times t$

   et le modèle exponentiel par la formule : $h(t) = 2\ 500\ 000 \times 1,015^t$.

   Avec t le nombre de mois après mai 2021, soit $t = 0$ au mois de mai 2021.

   Calculer le mois au cours duquel on obtient le même nombre de kilomètres pour les deux modèles. — 2 marks

Exercise 10 Calc. : ✓

La municipalité d'une ville de montagne prévoit de construire un tunnel dont la section transversale est donnée par la fonction f définie par :

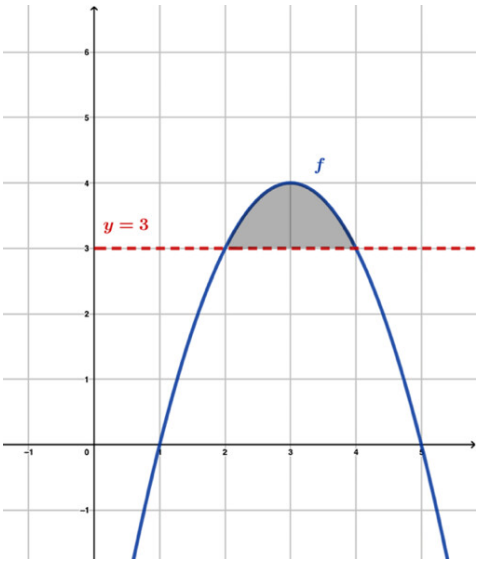
$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

Avec x en abscisse donnant la largeur en mètres du tunnel et $f(x)$ en ordonnée donnant la hauteur en mètres du tunnel.

1. À l'aide de votre calculatrice, **déterminer** les abscisses des points d'intersection de la fonction f avec l'axe des abscisses (les zéros de f). — 2 marks
2. En **déduire,** par le calcul, la largeur du tunnel en mètres. — 2 marks
3. **Trouver** la hauteur maximale du tunnel en mètres à l'aide de votre calculatrice. — 2 marks
4. **Montrer** que la fonction F définie par $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ est une primitive de la fonction f. — 3 marks
5. **Calculer** l'aire du domaine, en mètres carrés, délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$. Arrondir le résultat à deux chiffres après la virgule. — 3 marks
6. **Calculer** la longueur de l'arc de la courbe de f en mètres, entre $x = 1$ et $x = 5$, arrondie à deux chiffres après la virgule, à l'aide de la formule suivante : — 3 marks

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Les ingénieurs placent un support en bois d'une hauteur de 3 mètres jusqu'au sommet de la galerie, modélisé dans le graphique ci-dessous, par la zone grisée.



7. **Calculer** l'aire du support en bois (zone grisée), en mètres carrés, arrondie à deux chiffres après la virgule, à l'aide de la formule suivante : — 3 marks

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

8. On considère la courbe de la fonction f qui tourne autour de l'axe des abscisses.

   Calculer le volume du solide de révolution ainsi engendré par la courbe de f, entre $x = 1$ et $x = 5$, à l'aide de la formule suivante : — 4 marks

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

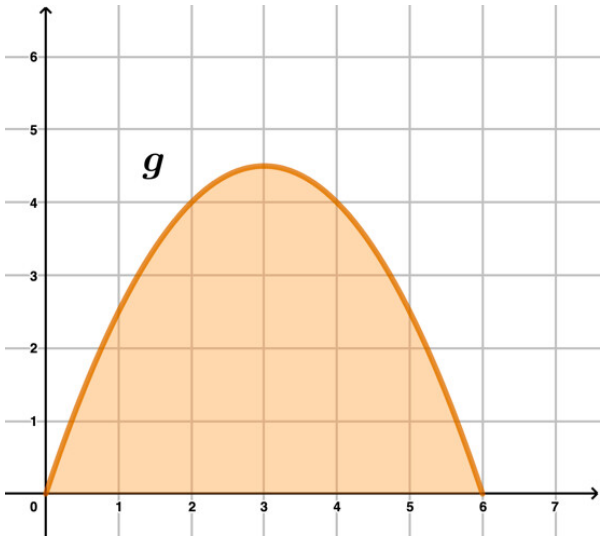
   Arrondir le résultat à deux chiffres après la virgule.

9. La cheffe de projet, décide d'agrandir le tunnel en creusant dans la roche.

   La section transversale du nouveau tunnel est modélisée par la fonction g définie par :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

   avec x et $g(x)$ en mètres, comme dans le graphique ci-dessous.



   Calculer l'aire du domaine coloré, en mètres carrés, délimitée par la courbe de g, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 6$. Arrondir le résultat à deux chiffres après la virgule. — 3 marks

Exercise 11 Calc. : ✓

Question B1: Oxygen Intake on a Treadmill

A group of athletes volunteered to have their oxygen intake measured whilst running on a treadmill.

The treadmill allows for adjustments to the incline of the run and to the speed at which the belt of the treadmill rotates.

The treadmill's running power can be adjusted by increasing the speed of the treadmill as well as increasing the incline of the run.

In the table, below, you will find data for the volunteer athletes' intake of oxygen, in litres per minute, for different levels of treadmill running power, in Watts.

Power (Watts)	30	60	90	120	150	180
Oxygen intake (litres/minute)	1.54	2.56	3.45	4.08	4.61	4.93

a) **Draw** a scatter diagram showing oxygen intake, in litres per minute, on the vertical axis, as a function of power, in Watts, on the horizontal axis. — 3 marks

Scale of Axes: Represent 10 Watts as 0.5 cm on the horizontal axis and one litre/minute as 1 cm on the vertical axis.

The data can be modelled using a linear function $y = a \cdot x + b$ where y is the oxygen intake and x is the power.

b) Use your calculator to **find** the equation of the line of regression of y on x, **giving** the values of a and b correct to three decimal places. — 2 marks

c) Use the line of regression, from part b) to **calculate**, correct to two decimal places, the oxygen intake of an athlete running on a treadmill with a power of 200 Watts. — 2 marks

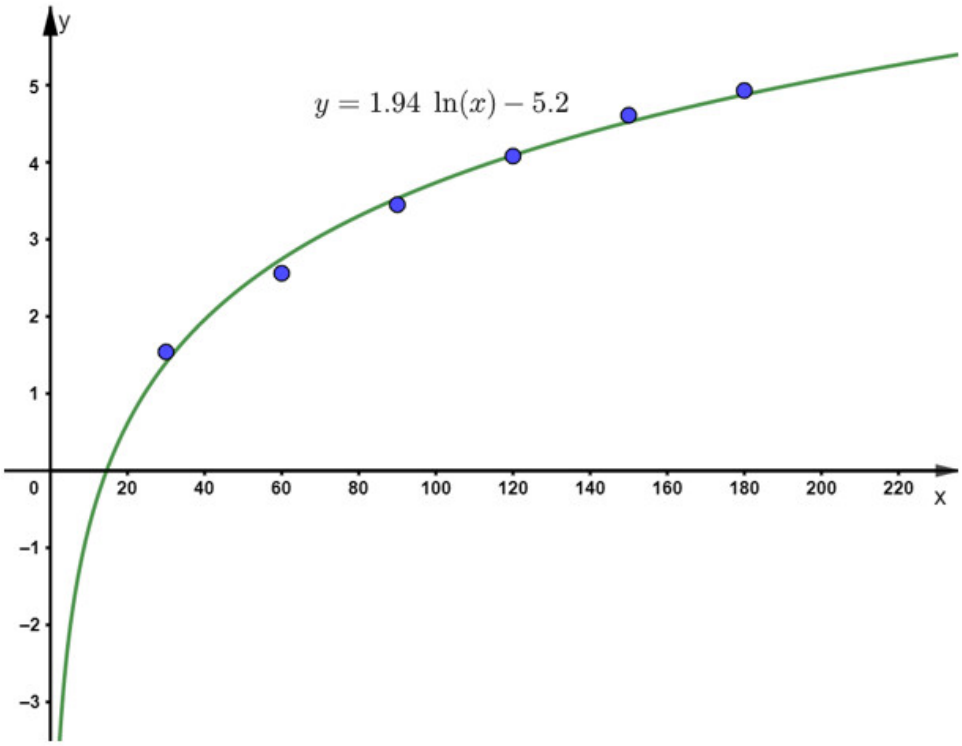
If you didn't find values for a and b in part b) please use $a = 0.02$ and $b = 1.16$.

d) **Determine** the value of $\overline{x}$ and $\overline{y}$, **rounding** to two decimal places, as appropriate. **Plot** the point $(\overline{x}, \overline{y})$ on the scatter diagram.	2 marks
e) **Draw** the regression line on your scatter plot. **Describe** the correlation between oxygen intake and treadmill running power. **Explain** why you described the correlation as you did.	3 marks

Consider the logarithmic model:

$$f(x) = 1.94 \cdot \ln(x) - 5.2$$

This model could also be used to model the bivariate data set Power, x, and Oxygen Intake, y. Below is the graph of the logarithmic function $y = f(x)$.



f) Use the logarithmic model to **calculate**, correct to two decimal places, the oxygen intake of an athlete when the treadmill's running power is 100 Watts.	2 marks
g) **Calculate**, correct to two decimal places, the value of the derivative of the logarithmic function when the treadmill's running power is 100 Watts.	2 marks
h) **Explain** the meaning of the value of the derivative calculated in part g).	2 marks

An athlete would like to adjust the treadmill's running power to permit an oxygen intake of exactly 3 litres/minute.

i) Use the logarithmic model to **determine**, correct one decimal place, the power level at which the treadmill must be set, to permit an oxygen intake of three litres/minute. — 2 marks

Both the linear model and the logarithmic model fit well to the given data points. However, when using the models for interpolation or extrapolation, one model falls short i.e., it is not as appropriate as thought.

j) **Select** the appropriate word(s) from the list: — 2 marks

Word Choices

A: Linear

B: Logarithmic

C: Interpolation

D: Extrapolation

to complete the sentence below.

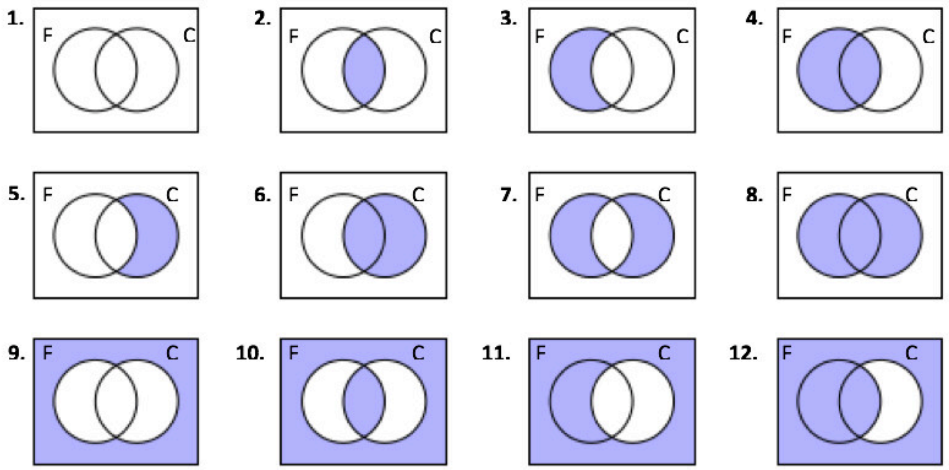
"The _____ model should not be used for _____."

Write the entire sentence on your exam script. **Provide** reasoning for your choice of word(s).

In the group of volunteer athletes, 60% were football players, 30% were cross-country runners and 20% of the athletes did neither of these two sports.

k) Given that an athlete plays football, **calculate** the probability that this athlete isn't a cross-country runner. — 2 marks

l) Out of the 12 Venn diagrams, numbered one through twelve, given below, **choose** the Venn diagram where the shaded region, matches the probability that you were asked to calculate in the part k). — 1 mark



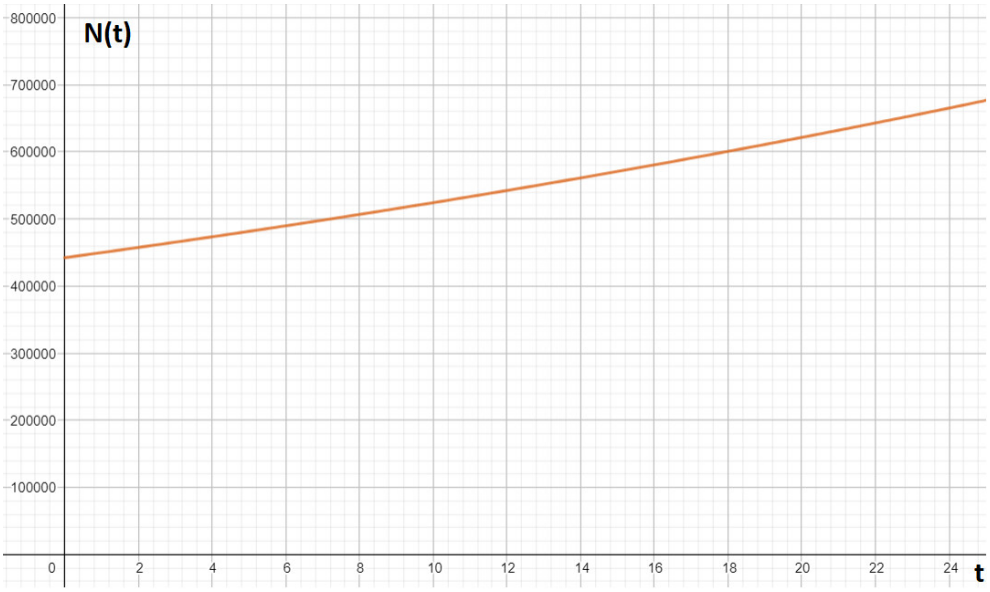
Exercise 12 Calc. : ✓

Question B2: Population Growth in Luxembourg

Luxembourg has experienced steep population growth in recent years.
Back in 2002, Luxembourg had 442,000 inhabitants; twenty years later, this number has increased to 621,000. Note, both population figures are to the nearest thousand.
Luxembourg's population growth can be modelled using the function:

$$N(t) = e^{0.017t+13}$$

where $N(t)$ is the number of inhabitants in Luxembourg after t, the time, in years.
January 1st 2002, is considered when time, t, is equal to zero.
The graph of function, $N(t)$, is shown below:



a) Use the model to **calculate** the number of inhabitants in Luxembourg in 2012, **rounding** to the nearest thousand inhabitants. — 2 marks

b) **Show** that the model can be rewritten as: — 3 marks

$$N(t) = 442,413 \cdot 1.017^t$$

c) Use the model in part b) to **find** the yearly growth rate of Luxembourg's population, **giving** your answer as a percentage. — 2 marks

The derivative of $N(t)$ is $N'(t) = 0.017 \cdot e^{0.017t+13}$.

d) Use this derivative to **calculate** the following integral: — 3 marks

$$\int_0^{20} N'(t)\,dt$$

Round your answer to nearest whole number. **Explain** what the result means in terms of Luxembourg's population growth.

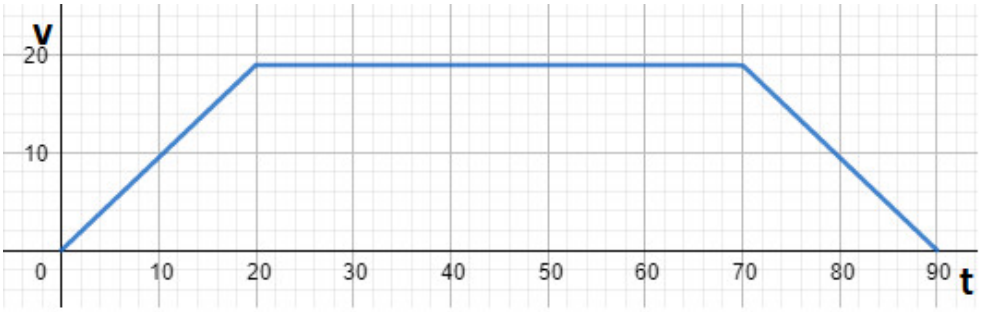
e) The given model is not flawless; **explain** why this model should not be used in the long run. 1 mark

A second model for population growth in Luxembourg is:

$$N_2(t) = \frac{800,000}{0.8 + 0.96^t}$$

f) Using the second model, **determine** the size of the Luxembourgish population in the long run. 2 marks

A rapid increase in population necessitates new infrastructure, such as, a supply of affordable housing, new hospitals, and schools, as well as, better public transport.
Luxtram, Luxembourg's tram, a part of Luxembourg's public transportation system, started operating in 2018.
On Luxtram's route from "Lux Expo" to "Lycee Bonneweg", the tram makes stops at "Universiteit' and 'Coque'. On the "Universiteit" to "Coque" segment of its journey, the tram takes 20 seconds to get to its full speed of 19 m/s.
The speed-time diagram, below, shows a typical, Luxtram journey between the stops "Universiteit" and "Coque".



Note, t is the time in seconds and v is the speed in metres per second.

g) Use the graph, above, to **calculate** the distance between the stops "Universiteit" and "Coque", **giving** your answer in kilometres. 2 marks

If the tram's full speed were to be 15 m/s, instead of 19 m/s, the speed-time diagram between the stops "Universiteit" and "Coque" would look different to the speed-time diagram shown above. The distance between the stops remains unchanged.

h) **Select**, from the options below, the option which correctly describes the changes to the speed-time diagram if the tram's top speed were to be 15 m/s instead of 19 m/s. 2 marks

Give a reason as to why you selected the option you did.

Option	Height of Graph at v = 15 m/s Comparison to the Height when v = 19 m/s	Width of Graph at v = 15 m/s Comparison to the Width when v = 19 m/s
A	Lower	No change
B	Lower	Narrower
C	Lower	Wider
D	No change	Narrower
E	No change	Wider

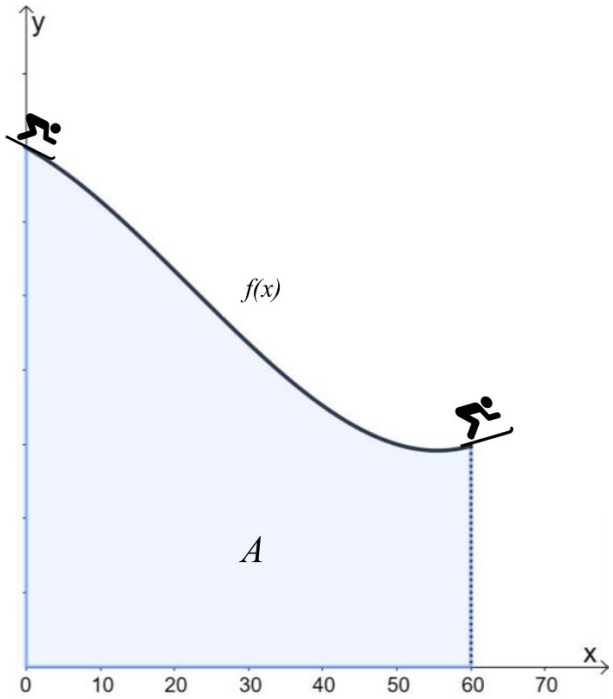
As Luxembourg's public transport is free; the tram is a popular means of transport for many students. Luxtram knows that, on a usual school day, 1,500 passengers take the tram, 35%, of whom, are high school students. Note: Passengers travel independently of each other. Let X be the number of high school students who take the tram, out of the $1,500$ passengers, who take the tram on a usual school day.	
i) **Explain** why X is binomially distributed, **stating** the parameters of this binomial distribution.	2 marks
j) **Calculate** the expected value and the standard deviation of the number of high school students taking the tram, on a usual school day, **rounding** to two decimal places where appropriate.	2 marks
k) **Calculate**, correct to three decimal places, the probability that, on a usual school day, at most 500 high school students use the tram.	2 marks
l) **Determine**, on a day which is not a usual school day, the total number of passengers taking the tram, if it were expected that 630 high school students would be taking the tram.	2 marks

Exercise 13 Calc. : ✓

Ski Jump

Part 1 (Parts 1, 2 and 3 of this question can be solved independently.)

The ramp of a ski jump is shown in the diagram below and can be modelled by the function $f(x)$.



The function $f(x)$ is defined in the interval shown in the diagram with the equation:

$$f(x) = \frac{3}{10\,000}x^3 - \frac{1}{50}x^2 - \frac{11}{20}x + 70$$

, where $f(x)$ and x are expressed in meters.

a) Use the equation and the information in the graph to **determine** the domain of $f(x)$. 2 marks

b) **Calculate** the area A. 3 marks

c) When a skier is at the end of the ramp, the skis define a tangent line r to the graph of $f(x)$. **Define** this tangent line and show every step in your calculation. 4 marks

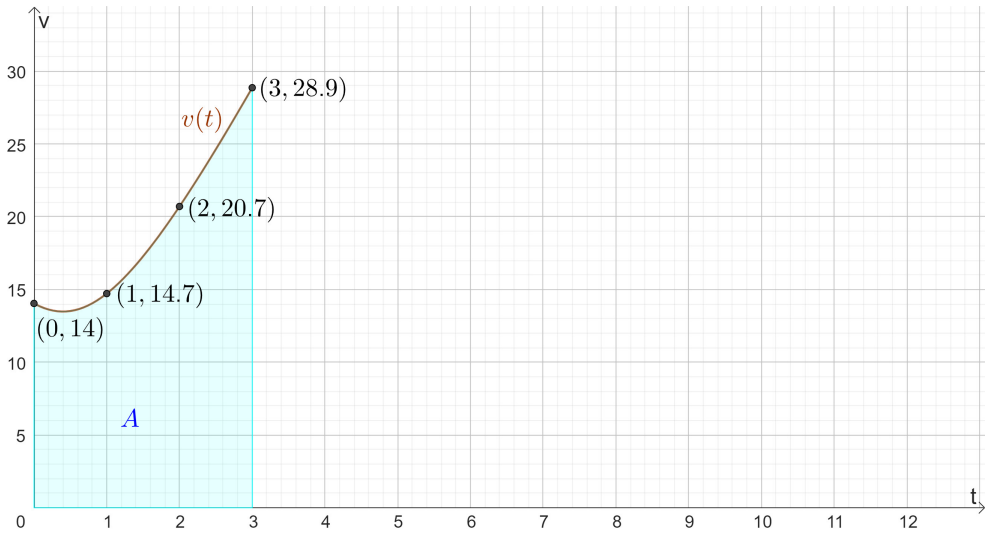
d) The skier is at the lowest point on the ski ramp. **Calculate** the height at the lowest point on the ski ramp. **Explain** your method. 4 marks

Part 2

Use the following definitions for Parts 2 and 3:

- The position of an object is determined by the function $s(t)$, where t is the time in seconds and $s(t)$ is expressed in meters.
- The velocity function $v(t)$ is defined as $v(t) = s'(t)$.
- The acceleration function $a(t)$ is defined as $a(t) = v'(t)$.

After taking off from the ramp, the skier flies through the air until he lands on the ground. The time between take-off and landing is exactly 3 seconds. The velocity function $v(t)$ (in m/s) of the flying skier is shown in the graph below (with t in seconds).



e) **Find** the velocity (in m/s) of the skier when he lands on the ground. 1 mark

f) Use the available information in the diagram to **calculate** an approximation for the area A. **Explain** your method. 3 marks

g) Is the approximation for the area A from question f) an underestimation or an overestimation of the exact area? **Justify** your answer. 2 marks

h) **Interpret** what the exact area A means in the given context. 2 marks

Part 3

As the skier lands on the landing slope, he slows down until he comes to a complete stop. The velocity of the skier on the landing slope can be modelled by the function:

$$v(t) = -3.4 \cdot t + 28.9$$

where t is in seconds and $t = 0$ corresponds to the moment when the skis touch the ground.

i) How long does it take for the skier to slow down to a complete stop? **Justify** your answer. — 2 marks

j) **Investigate** whether a landing slope of 120 m is long enough for the skier. — 2 marks

Exercise 14 Calc. : ✓

The Island

Part 1 (Parts 1 and 2 of this question can be solved independently.)

The table below gives the measured population on an island.

Beginning of the year	2015	2020
Population	5 500	7 250

a) Use a linear model to **predict** the population at the beginning of 2023. 2 marks

b) Peter uses an exponential model $p(t) = k \cdot a^t$ to model the population. In this model, $t = 0$ corresponds to the beginning of 2015 and a and k are parameters.

Find the parameters a and k of the model $p(t)$. 3 marks

c) **Show** that the exponential model $f(t) = 5\ 500 \cdot e^{0.05525 \cdot t}$ adequately fits the given data. 2 marks

For questions d), e) and f), you can use the exponential model

$$f(t) = 5\ 500 \cdot e^{0.05525 \cdot t}$$

In this model $t = 0$ corresponds to the beginning of 2015.

d) **Determine** the annual growth rate of the exponential model. 2 marks

e) **Calculate** $f'(5)$ and **interpret** what the result means in the given context. 2 marks

f) Use the exponential model to **find** in which year the population would reach 10 000 people. 3 marks

At the beginning of 2022, the island was hit by an earthquake. Although nobody was hurt in the event, 6 000 people decided to leave the island immediately. After they left, the growth rate of the island population was the same as before.

g) **Investigate** in which year the island population will be the same as it was at the beginning of 2015. 3 marks

Part 2

The day length is the time between sunrise and sunset. Peter lives on the island and measured the day length of every first day of the month during a whole (non-leap) year. The results are given below:

Date	1st of Jan	1st of Feb	1st of Mar	1st of Apr	1st of May	1st of Jun
Daylength (in hours)	7.67	8.55	10	11.2	12.33	13

Date	1st of Jul	1st of Aug	1st of Sep	1st of Oct	1st of Nov	1st of Dec
Daylength (in hours)	13.05	12.67	11.6	10.35	8.95	7.83

Peter models the day length $h(x)$ with the periodic model $h(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$, where $h(x)$ is expressed in hours, x is expressed in days and $x = 1$ corresponds to the 1st of January.

h) **Explain** why the day length $h(x)$ can be modelled with a periodic model and **give** the period of this model. 2 marks

i) **Estimate** the amplitude of this periodic model. 2 marks

j) Hence, **investigate** for which values of the parameters a, b, c, and d the periodic model $h(x)$ fits the data adequately. 4 marks

Exercise 15 Calc. : ✓

Partie 1

Marie exploite une ferme.
La production laitière de la ferme peut être modélisée par la fonction f donnée par

$$f(x) = -0,0028x^2 + 0,57x, \qquad 50 \leq x \leq 90,$$

où x est le nombre de vaches de l'exploitation et $f(x)$ représente la production laitière journalière moyenne mesurée en hL (1 hL = 1 hectolitre = 100 litres).

a) **Calculer** la production laitière journalière moyenne de 70 vaches. — 2 marks

b) **Déterminer** le nombre de vaches dont Marie a besoin pour maintenir une production laitière journalière moyenne de 25 hL ou plus. — 3 marks

c) Le modèle peut-il être étendu à 205 vaches ? **Justifier** la réponse. — 2 marks

Partie 2

d) La production laitière journalière d'été par vache suit une distribution normale de moyenne $\mu = 48$ litres et d'écart-type $\sigma = 16$ litres.

Calculer la probabilité qu'une vache choisie au hasard produise plus de 40 litres de lait un jour d'été. Donner la réponse à 0,001 près (3 décimales). — 2 marks

e) On suppose que la probabilité qu'une vache choisie au hasard produise plus de 40 litres de lait par jour est égale à $0,69$. Actuellement, Marie possède 80 vaches.

Calculer la probabilité que moins de 60 de ces vaches produisent plus de 40 litres de lait par jour. — 2 marks

Partie 3

Le tableau ci-dessous montre les précipitations annuelles (mesurées en cm) sur l'exploitation au cours des 10 dernières années.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
x = années après 2013	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y = précipitations (cm)	123	125	117	115	120	113	110	100	108	105

f) **Tracer** un nuage de points pour représenter les données du tableau et, en interprétant ce diagramme, **décrire** la corrélation. — 4 marks

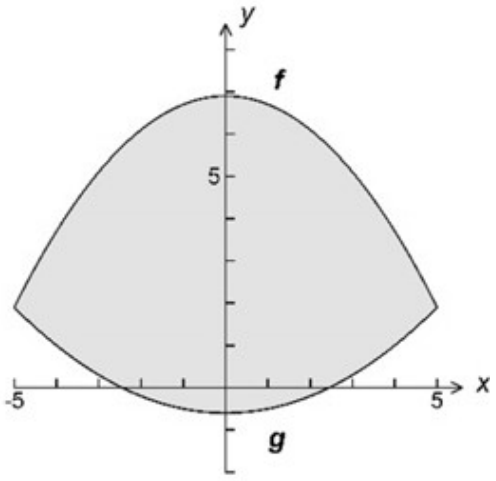
g) **Établir** une équation de la forme $y = m \cdot x + b$ de la régression linéaire de y en x en utilisant les données du tableau. — 4 marks

Tracer la droite de régression sur le même diagramme.

h) **Expliquer** pourquoi un modèle de régression linéaire pourrait ne pas être approprié à ces données sur un grand nombre d'années. — 2 marks

Partie 4

Il y a un étang sur la propriété, dont le diagramme se trouve ci-dessous (1 unité = 1 mètre) :



Les bords de cet étang sont représentés par les graphiques des fonctions f et g définies par
$f(x) = -0,2x^2 + 6,9, \quad -5 \leq x \leq 5$ pour le bord supérieur et
$g(x) = 0,1x^2 - 0,6, \quad -5 \leq x \leq 5$ pour le bord inférieur.

i) **Calculer** l'aire de la surface de cet étang. — 4 marks

Exercise 16 Calc. : ✓

Partie 1

Vélos publics à Helsinki

a) En août 2021, les trajets effectués dans le système de partage de vélos d'Helsinki avaient une distance moyenne de 2,25 km et un écart type de 16,04 km.

Expliquer ce qui a pu causer un si grand écart-type. — 2 marks

b) Sur une certaine période, la durée moyenne des déplacements était de $\mu = 645$ secondes et l'écart-type était de $\sigma = 271$ secondes. On suppose que la durée des trajets suit une distribution normale.

Calculer la probabilité qu'un trajet ait duré plus de 12 minutes. — 3 marks

Partie 2

Une étude couvrant la période 2009–2019 a montré que la vente de vélos électriques dans l'Union européenne peut être modélisée par la fonction N donnée par

$$N(t) = 0,0756 \cdot e^{0,163t+2,03},$$

où t est le nombre d'années après 2009 et $N(t)$ est le nombre de vélos électriques vendus, en millions.

c) **Réécrire** la formule de $N(t)$ sous la forme $N(t) = K \cdot A^t$. — 2 marks

d) **Déterminer**, d'après ce modèle, le pourcentage annuel d'augmentation des ventes de vélos électriques. — 2 marks

e) Depuis 2009, le nombre total de vélos (y compris les vélos électriques) vendus en Europe est resté à peu près constant à 20 millions de vélos par an.

Estimer l'année à partir de laquelle le nombre de vélos électriques vendus représentera plus de la moitié du nombre total de vélos vendus. — 3 marks

Partie 3

La hauteur $h(t)$ en centimètres (cm) d'une pédale de vélo au-dessus du sol au temps t, en secondes, est définie par $h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + d$.

f) La hauteur maximale de la pédale est de 49 cm et la hauteur minimale est de 9 cm.

Déterminer a et d. — 3 marks

g) Le temps nécessaire pour effectuer une rotation complète de la pédale est de 1,5 seconde.

Calculer b. — 3 marks

Expliquer quelle information b donne sur la rotation de la pédale.

Partie 4

Sur un site web (Euro-Velo) consacré aux cycloroutes de longue distance en Europe, la Route du Rhin a été l'itinéraire le plus visité.
En 2020, 142 124 des 1 644 417 visiteurs du site web ont visité la Route du Rhin.
En 2021, sur un échantillon aléatoire de 2 000 visiteurs du site web, 156 ont visité la Route du Rhin.

L'organisation Euro-Velo se demande si la proportion de personnes ayant visité la Route du Rhin a diminué de 2020 à 2021. Elle effectue donc un test d'hypothèse à un seuil de signification de 5%.
p désigne la proportion de tous les visiteurs du site web qui ont visité la Route du Rhin en 2021.

h) **Vérifier** que l'hypothèse nulle de ce test est $H_0 : p = 0,086$. — 2 marks

i) **Déterminer** si le test est unilatéral à gauche ou à droite. **Justifier** la réponse. — 2 marks

j) **Calculer** la probabilité que le nombre de visiteurs de la Route du Rhin provenant d'un échantillon aléatoire de 2 000 visiteurs du site web soit inférieur ou égal à 156, en supposant que H_0 soit vraie. — 3 marks

Décider si H_0 peut être rejetée. **Justifier** la conclusion.

Exercise 17 Calc. : ✓

For this question you are reminded of the following formulae:

- the volume of the solid of revolution generated by rotating the area under the graph of $y = f(x)$ around the x-axis limited by the lines $x = a$ and $x = b$ is given by:

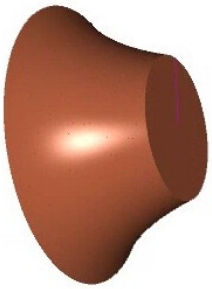
$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

- the length of an arc along the graph of $y = f(x)$ from $x = a$ to $x = b$ is given by:

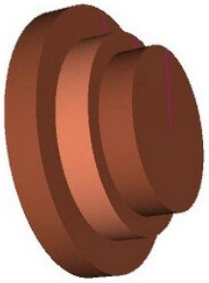
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x$$

- the volume of a cylinder with radius r and height h is given by $\pi r^2 h$.

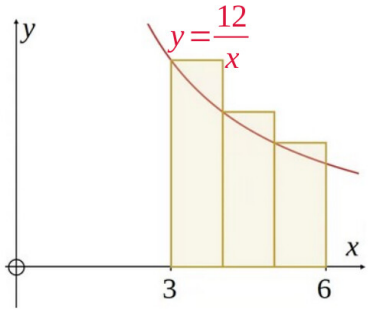
A carpenter uses a machine called a lathe to shape wood so that it always has a circular cross section.
She wishes to produce the final solid shown on the right:



She starts with 3 cylinders glued together as shown.



The original cylinders correspond to the volume of revolution created by rotating the "left rectangles" shown in the graph on the right, where the curve is given by $y = \dfrac{12}{x}$ and the three rectangles are equal in width between between $x = 3$ and $x = 6$.
The unit of length for x and y is 1 cm.



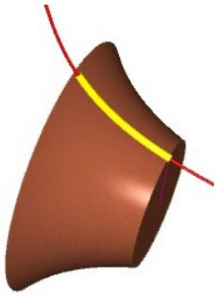
The final smooth solid corresponds to the volume of revolution created by rotating the exact area under the curve around the x-axis, also between $x = 3$ and $x = 6$.

Giving your answers in cm^3 to one decimal place:

a) **Calculate** the total volume of the original cylinders. 3 marks

b) **Calculate** the volume of wood left in the final smooth solid. 3 marks

The carpenter will decorate the solid with a pure gold arc that follows the curve $y = \frac{12}{x}$ as shown.
The gold line costs 2 per metre length.



c) **Calculate** the length of the gold arc to 3 decimal places of cm, and hence **estimate** the total cost of the gold to the nearest centime if the carpenter decorates 30 copies of the solid. 4 marks

The carpenter labels the solid *J* and then produces nine more similar solid shapes of various sizes labelling them from *A* to *I*.
She intended to use the same type of wood for the new solids as she did for *J*, but after completing the work she realises that she used a denser wood for two of them, and she is not sure which.
She calculates the volume and finds the mass of each of the new solids, recording the results in the table show next page.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
Volume (cm^3)	80.5	63.4	90.8	53.4	71.7	105.6	88.8	66.9	99.7	
Mass (g)	36.0	28.5	45.5	24.0	32.5	47.5	44.5	30.0	45.0	

d) Use your calculator to **find** (with coefficients to 2 decimal places) an equation of the line of best fit and the correlation coefficient for the solids *A* to *I*. 3 marks

e) **Identify** which of *A* to *I* are made of denser wood. Remove them from the data and then find (again to 2 decimal places) an equation of the line of best fit and the correlation coefficient for the remaining seven solids. 3 marks

f) *J* has a mass of 34 g. **Determine** an approximation for the volume, in cm^3 to 1 decimal place, of *J* from your answer to e) and compare it with your answer to b). **Comment** on the results. 3 marks

A reminder that density is calculated as mass per unit volume, in this in case grams/cm^3.

g) **Explain** how to use the line of best fit to calculate the density of wood for the eight solids made from the same type of wood. 3 marks

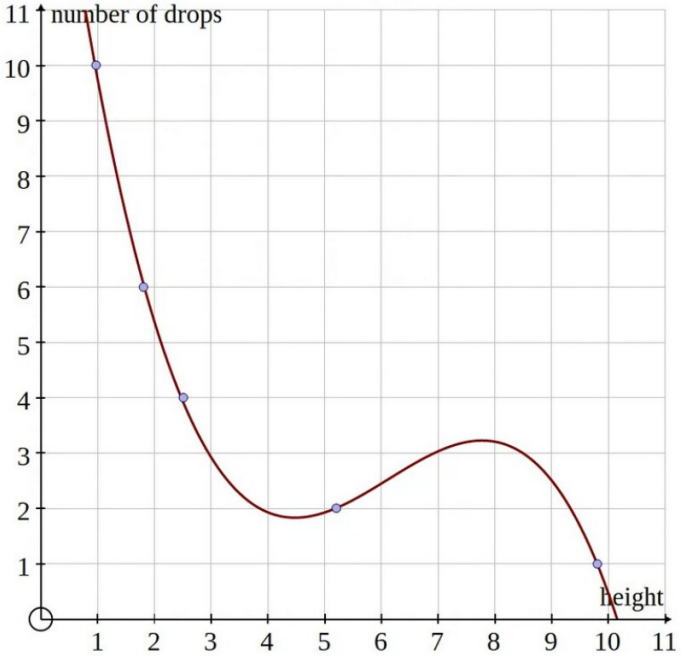
h) **Calculate**, to 1 decimal place in grams/cm^3, the density of the wood used for the other 2 solids. 3 marks

Exercise 18 Calc. : ✓

Crows can break open walnuts by dropping them from a tree onto a hard surface.
If the walnut does not break the first time the crow flies back to the tree and drops it again.

Observation of crows doing this with similar walnuts gave the following results, and the graph on the right shows the data with a cubic curve that fits the data well.

height in metres, x	number of drops, y
0.96	10
1.8	6
2.5	4
5.2	2
9.8	1



a) **Explain** why the cubic seems a poor model for this situation. 4 marks

b) Using Napierian logarithms **find** the logarithm, to 2 decimal places, of each item of data above and **create** a table on your answer sheet as shown below: 3 marks

$\ln x$	$\ln y$
...	...

c) **Find** the line of best fit for the logarithm data in the form $\ln y = a \ln x + b$, stating the values of a and b to 2 decimal places. 3 marks

d) Using the model from part c), **find** an approximation to the nearest cm for the height from which a crow would have to drop a walnut to break it at the fifth attempt. 4 marks

A crow realises that a walnut it has picked up has gone bad and drops it while flying over a lake. It takes 2 seconds to hit the water.
The vertical velocity of the walnut over time is given by:

- $v_1(t) = -10t + 0.5t^3$ before it hits the water
- $v_2(t) = t - 4$ while in the water until it come back to the surface,

where t is the number of seconds after the walnut is released by the crow and v_1 and v_2 are the velocities in m/s. A negative velocity means that the walnut is falling.

e) **Determine** the height above the water when the crow releases the walnut. 4 marks

f) **Find** the maximum depth of the walnut in the water. 4 marks

g) **Justify** that the walnut is under water for 4 seconds. 3 marks

Exercise 19 Calc. : ✓

Questions 1 and 2 are independent from questions 3 and 4

The oldest method of preserving food is dehydration. The process consists in using a source of heat to evaporate water from the food. We consider a fresh apricot put in a dryer to be dehydrated.
Before dehydration, this fresh apricot weights 45 g of which 85% is water. The process of dehydration is complete when the apricot weights 9 g with 25% of water. At this stage, the fruit is considered as a "dried apricot".

1. (a) **Calculate** the mass of water contained in the fresh apricot. — 1.5 marks
   (b) **Show** that the dried apricot has 2.25 g of water left. — 1.5 marks

We can model the mass of water depending on the time spent in the dryer by the function

$$w(t) = 38.25 \cdot e^{-0.26 \cdot t} \qquad \text{with } t \in [0; 13]$$

where $w(t)$ is the weight in grams and t the time in hours.

2. (a) **Interpret** the numerical value 38.25. — 1 mark
   (b) **Calculate** the mass of water after 2 hours in the dryer. — 2 marks
   (c) If the apricot spends 8 hours in the dryer, will it be considered as a "dried apricot"? — 2 marks
   (d) Use technology to **determine** the minimum time for the apricot to be labelled "dried apricot". — 3 marks

An apricot producer buys his trees from three different providers : 35% of the trees come from the tree nursery T_1, 25% from the tree nursery T_2 and the rest from the tree nursery T_3.
Each provider has two qualities of apricot trees : high quality or medium quality. The delivery from the tree nursery T_1 has 80% of high quality trees, the one from T_2 has 50% of high quality trees and the one from T_3 only 30%.
The producer chooses a tree randomly within all deliveries. We consider the following events :

- T_1 : "the tree comes from the tree nursery T_1"
- T_2 : "the tree comes from the tree nursery T_2"
- T_3 : "the tree comes from the tree nursery T_3"
- H : "it's a high quality tree"
- M : "it's a medium quality tree"

3. (a) **Construct** a tree diagram that models the situation. — 2 marks
   (b) **Calculate** the probability that the tree is a high quality one coming from T_3. — 2 marks
   (c) **Show** that the probability of picking a high quality tree $P(H)$ is 0.525. — 2 marks
   (d) The tree is a high quality one, **calculate** the probability it comes from T_1. Give your answer correct to 3 d.p. — 3 marks

A random sample of 10 apricots is selected within the stock of the apricot producer. We assume the stock is large enough so that this selection can be considered as drawing apricots with replacement. We also assume that the probability for an apricot to be of high quality is the same as for a tree to be a high quality one.
Let X be the random variable counting the number of high quality apricots.

4. (a) **Give** the parameters of the binomial distribution followed by X. — 1 mark
   (b) **Calculate** the probability that exactly 5 apricots are high quality ones. Give your answer correct to 3 d.p. — 2 marks
   (c) **Calculate** the probability that at least 2 apricots are high quality ones. Give your answer correct to 3 d.p. — 2 marks

Exercise 20 Calc. : ✓

For common motor vehicles we consider the two variables *Engine size* (cylinder volume) and *Fuel economy* (number of kilometres travelled for every litre of petrol).

The following data were collected for 10 vehicles.

Car	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Engine size	1.1	1.2	1.2	1.5	1.5	1.8	2.4	3.3	4.2	5.0
Fuel economy	21	18	19	18	17	16	15	20	14	11

For example, the car A has an *engine size* of 1.1, and a *fuel economy* of 21, meaning it will travel 21 kilometres for 1 litre of petrol.

1. (a) **Construct** a scatter diagram of the above data, the engine size being the independent variable. Use the graph paper on the annex page (to be handed in). — 2 marks

   (b) **Describe** the correlation between the two variables. — 2 marks

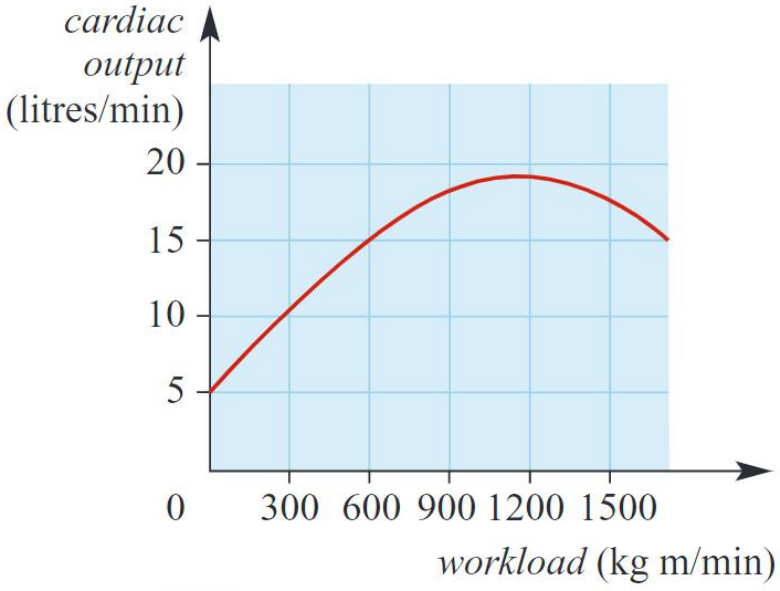
   (c) Which car gives a fuel economy reading that does not support the general trend? — 1 mark
   Note: this outlier is not a recording error, so it cannot be removed.

   (d) Use technology to **calculate** Pearson's correlation coefficient r (correct to 3 d.p.). — 2 marks

   (e) Use technology to **find** the equation of the regression line. Round off the gradient and y-intercept to 1 d.p. — 2 marks

   (f) Use your regression line to **estimate** the fuel economy for an engine size of 2. — 2 marks

Cardiac output is an important factor in athletic endurance. The graph shows a stress-test graph of cardiac output (measured in litres/min of blood) versus workload (measured in kg m/min).



2. (a) **Estimate** the average rate of change of cardiac output with respect to workload as workload increases from 0 to 1 500 kg m/min (correct to 4 d.p.). — 2 marks

(b) **Estimate** the instantaneous rate of change of cardiac output with respect to workload at the point where the workload is 450 kg m/min (correct to 4 d.p.). — 3 marks

(c) There is a moment when the instantaneous rate of change of cardiac output with respect to workload is equal to zero. **Estimate** for what workload that happens. **Justify** properly your answer. — 2 marks

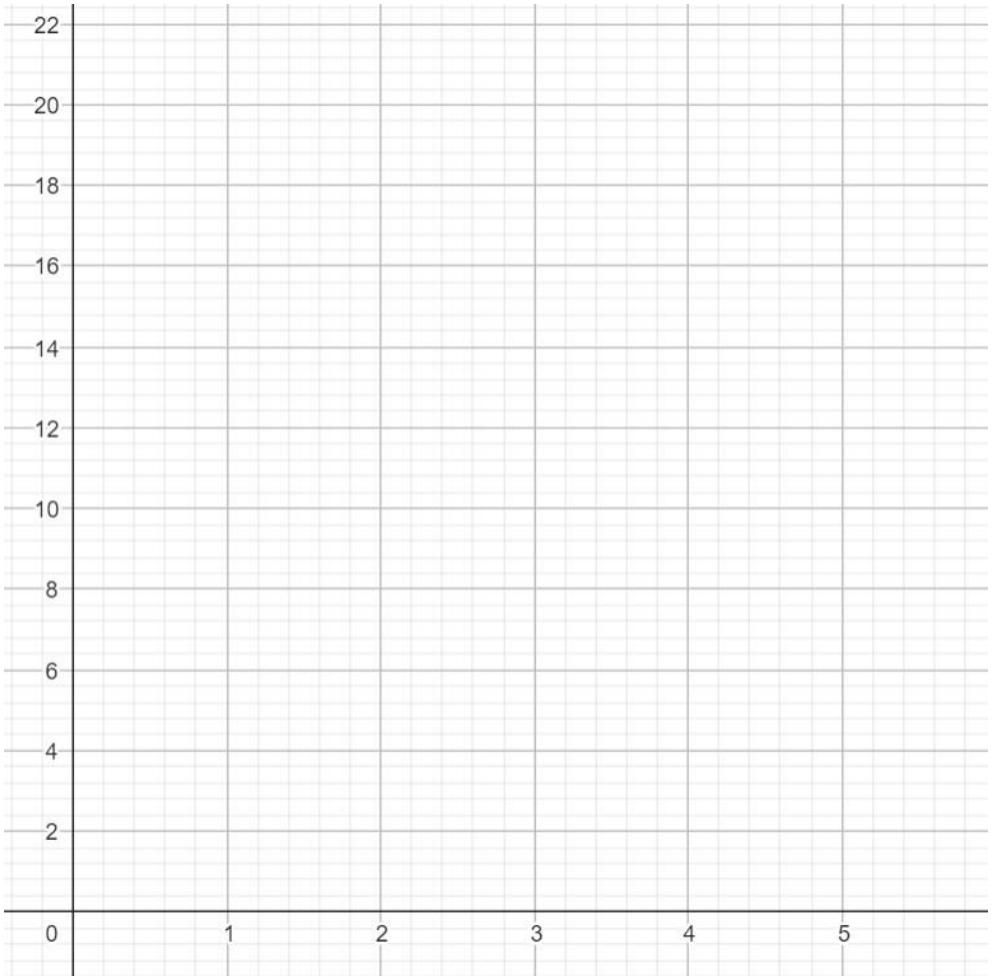
For a new TV show, the main characters are two men, one woman and two girls.
At the end of the first round of castings, there remain 5 actors, 4 actresses and 6 girls.

3. (a) **Determine** how many different casts are possible if there are no restriction. — 2 marks

(b) One actress and one girl are actually mother and daughter. **Determine** the probability that they would both be chosen for the show (correct to 3 d.p.). — 3 marks

(c) The producer wants his son, who is one of the 5 remaining actors, to be part of the cast. And in the mean time, two of the 6 girls declined the role. **Determine** how many possible casts there are. — 2 marks

Fuel economy



Engine size

Exercise 21 Calc. : ✓

The high-speed train (TGV) going to Gare Centrale in Luxembourg City starts slowing down when it passes the train station of the town of Bettembourg. The train velocity, v, in m/s, is given by:

$$v(t) = 84 - 0.3t$$

... where t is the time in seconds after the train has passed the Bettembourg train station.
For the following questions, you may use the formulae:

- The distance d (in meters) covered by an object moving at a velocity $v(t)$ between time a and time b is given by: $d = \int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t$.
- The acceleration a (in m/s^2) of an object moving at a velocity $v(t)$ is given by: $a = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$. It can be positive or negative.
- The thermal energy E (in J, Joules) generated between time a and time b by the TGV train moving at a velocity $v(t)$ is given by: $E = 220\ 000 \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.

a) **Find** the distance the train has covered in 100 seconds after it has gone through the Bettembourg train station. — 2 marks

b) **Calculate** the acceleration of the train (here a deceleration). — 2 marks

c) **Justify** with an appropriate calculation that the train stops 280 seconds after it has gone through the Bettembourg train station, keeping in mind that the train is considered to have stopped when its velocity is equal to zero. — 3 marks

d) During deceleration, there is heat buildup in the brakes of the train due to friction. **Calculate** the thermal energy generated in the train brakes between the start of the deceleration process in Bettembourg and the point at which the train comes to a complete stop in Gare Centrale. — 2 marks

The TGV generates noise. The government is investigating using trees and bushes to mitigate the effects of this noise. Through dense foliage, the train noise attenuation A, measured in decibels per meter, dB/m, is given by the following model:

$$A(x) = -0.058 + 0.0177 \cdot \ln(x)$$

... where x is the propagation distance of the noise, measured in meters from the train.

e) **Calculate** the attenuation right past the bushes, 30 meters away from the train. — 3 marks

f) **Find** the minimal distance away from the train that provides an attenuation of at least 0.04 dB/m. — 3 marks

g) **Discuss** the limit of the attenuation value when the propagation distance approaches infinity. — 2 marks

People reach the train station on time with a probability of 89%. On a winter's day, 210 people want to ride a train. Let X be the number of persons who reach their train on time. We assume that X follows a binomial distribution.

h) **Determine** the probability that none of the persons reach their train with a delay. — 2 marks

i) **Find** the probability that at least 200 of the persons reach their train on time. — 2 marks

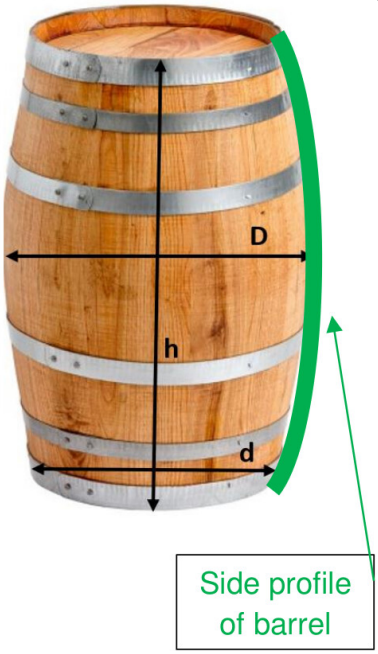
j) **Find** the probability that less than 90% of this group will reach their train on time. — 2 marks

k) **Calculate** the expected value and the standard deviation of X. — 2 marks

Exercise 22 Calc. : ✓

A Luxembourgish winery produces wines that are partially fermented in oak barrels.
On average, the barrel used has the dimensions shown in the figure opposite:

- Height: h=10 dm
- Minimum diameter: d=5 dm
- Maximum diameter: D=6 dm

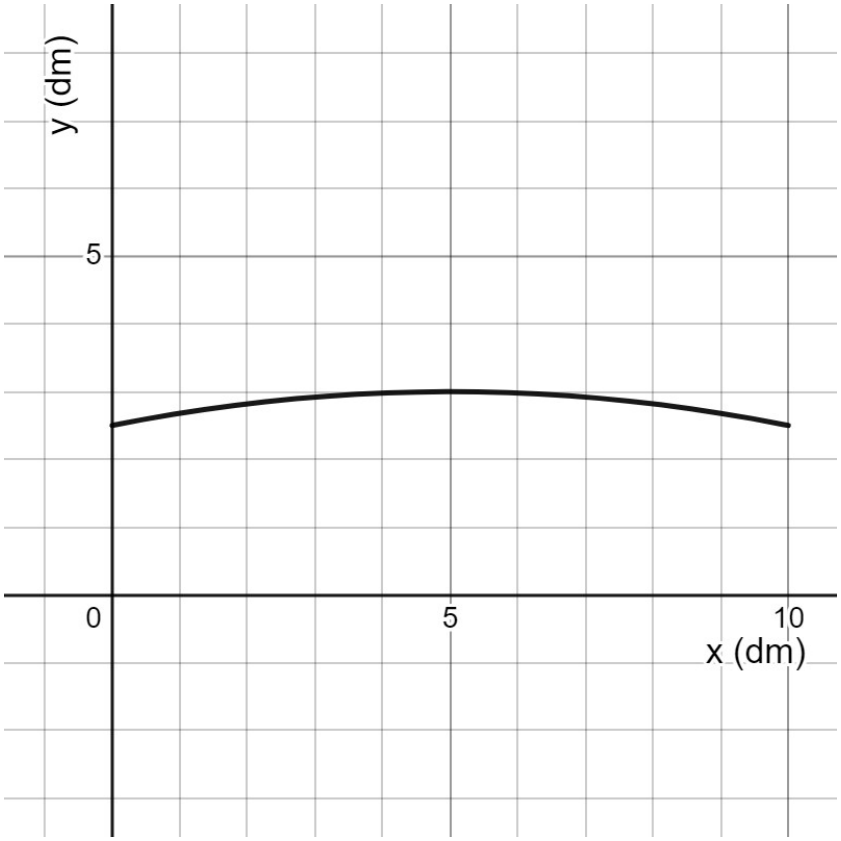


The side profile of the barrel can be modelled with a function

$$f(x) = -0.02x^2 + 0.2x + 2.5$$

... where the radius of the barrel $f(x)$ is represented as a function of the height x (with $0 \leq x \leq 10$ and the measurements are expressed in decimeters).

The side profile is also shown in the following figure:



a) **Calculate** $f'(5)$ and **verify** that the barrel has a maximum diameter of 6 dm. 2 marks

b) Knowing that the formula for the length of a curve is 2 marks

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

. . . **calculate** the length of the side profile in dm (express the result to an accuracy of three decimal places)

c) According to the barrel manufacturer, the capacity of the average barrel is between 252 and 253 dm^3. **Verify** that the company's statement is correct using the formula for the volume of a rotating solid: 2 marks

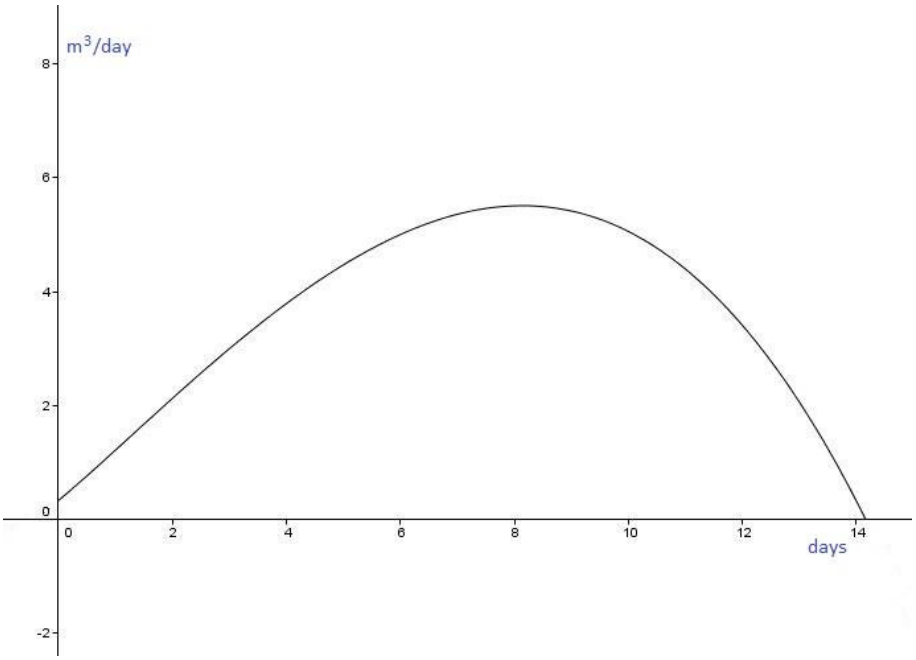
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

d) After fermentation, the wine is transferred to barrels with a flow in cubic meters per day given by:

$$g(t) = -0.005 \cdot t^3 + t + \frac{2}{3 \cdot t + 6}$$

where t is the time after the transfer starts, measured in days.

The graph of function g is represented here:



i. **Calculate** the volume of wine transferred between day 2 and day 14 (inclusive). 2 marks

ii. **Determine** when the rate of wine transfer is at a maximum. 2 marks

Part of the wine produced is used to make a liquor wine for aging. As the years pass, the wine evaporates. The following table shows the amount of wine left $w(t)$ in a barrel filled in the year 1990, with respect to time t (in years), with t starting from $t = 1990$.

t (year)	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Wine left (liters)	252	252	251	251	249	247	244	244	243	240	239

Enter the data into your calculator.

e) Interpreting the trend observed in the data for liquid remaining as a function of year, **explain** why the data appear to be correlated. — 1 mark

f) Assuming a linear model can be applied, **determine** the equation of the linear regression line. Give the coefficients of the equation with a precision of two decimal places. — 2 marks

g) **Determine** the linear regression coefficient with a precision of two decimal places. **Interpret** the result; is the correlation reliable? — 1 mark

h) For this question, we will take: $w(t) = -1.418t + 3\,076$. **Estimate** how much wine will be left in a barrel after 20 years (your answer should be correct to the nearest liter). — 2 marks

The wine is finally sold in bottles. The promotional campaign for the product requires that the inside of the bottle cap contains a code that gives the buyer a chance to win a prize with a probability $p = 0.093$. In a shopping center, 100 bottles are simultaneously displayed.

i) **Justify** the fact that one can use a binomial distribution with probability p to model this situation. — 1 mark

j) **Calculate** the mean value and variance of the binomial distribution. — 2 marks

k) **Calculate** the probability (with a precision of 4 decimal places) that there are at least 2 bottles out of 100 with a winning cap. — 2 marks

l) **Calculate** the probability (with a precision of 4 decimal places) that there are exactly 5 bottles out of 100 with a winning cap. — 2 marks

m) **Calculate** the probability (with a precision of 4 decimal places) that there are a maximum of 10 bottles out of 100 with a winning cap. — 2 marks

Exercise 23 Calc. : ✓

Following the introduction of 100 squirrels into a forest in 2020, the population is studied. It is observed that the number of squirrels increases by an average of 30% each year.
It is assumed that the squirrel population can be modeled by a function of the form:

$$P(x) = k \times A^x$$

where $\begin{cases} P \text{ is the number of squirrels} \\ x \text{ is the time in years} \\ k \text{ and } A \text{ are constants to be determined} \end{cases}$

a) **Determine** the value of the constant A of the model corresponding to the data given. **Justify** your response. — 2 marks

For the rest of the exercise, we use the following function:

$$P(x) = 100 \times 1.3^x$$

b) **Calculate** the squirrel population after 6 months; 5 years; 10 years. — 3 marks

c) Using the calculator, **determine** the year in which the squirrel population will exceed 500 squirrels. — 2 marks

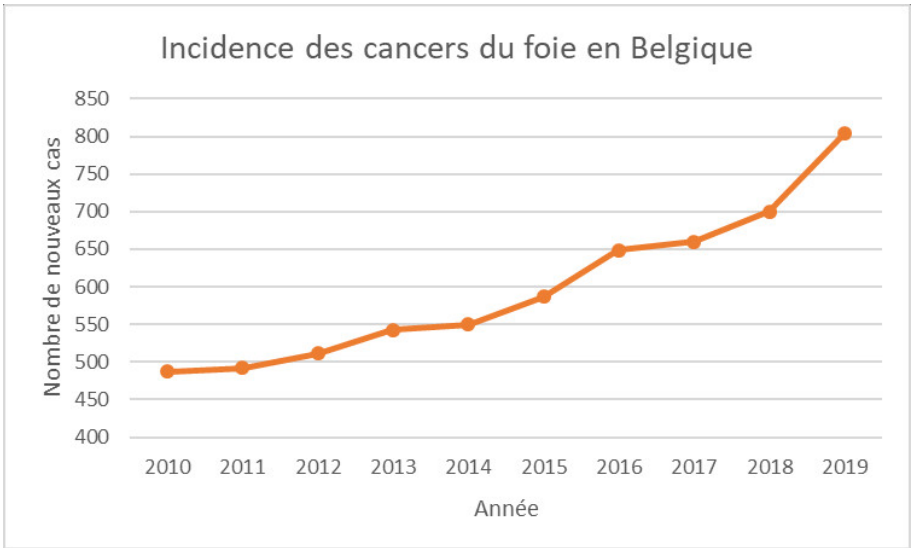
d) **Explain** why this model cannot be used in the long term. — 2 marks

In order to study the squirrel population in 2021, a feeder was installed in the middle of the forest. A camera is placed nearby, as well as a heat detector with a tally counter. Every hour of the day, the number of squirrels present at the feeder is counted.
During a day in 2021, a maximum number of visitors (10 squirrels) was detected at 8:00 in the morning. At 20:00, the minimum number of visitors was counted (no squirrels).
It is assumed that the use of the feeder over time can be modelled by a periodic function.

e) **Determine** the parameters a, b, c and d in the model of the type: $$N(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$$ where N is the number of squirrels present at the feeder and x is the hours in a day.	3 marks
In 2020, a similar study was carried out. The number of squirrels at the feeder over time was modeled in this earlier study by the following function: $$T(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot (x - 3)\right) + 7$$	
f) Using the periodic model for the year 2020, **calculate** the number of squirrels at 14:00.	2 marks
g) **Represent** the periodic pattern.	2 marks
h) Using the periodic model for the year 2020, **estimate** the hour(s) of the day when there are 7 visitors to the feeder.	3 marks
It is estimated that 10% of the squirrels in the forest are chipped in order to be traced.	
i) **Calculate** the probability of having at least 1 chipped squirrel among the squirrels present at the feeder at 08:00 in the morning. Round the answer to 4 decimal places.	3 marks
When the squirrel population reaches 1 000 individuals, an epidemiological study is conducted. It is observed that 60% of squirrels are females, out of which 15% are still of the generation introduced in 2020; while 250 squirrels are males of one of the following generations. We define the following events: • F = the squirrel is a female • M = the squirrel is a male • G_0 = the squirrel is of the generation initially introduced • G_1 = the squirrel is of one of the generations following the one initially introduced	
j) A squirrel from the starting generation is taken at random. **Determine** the probability that this squirrel is a male.	3 marks

Exercise 24 Calc. : ✓

Medical data collected in recent years by the Cancer Registry show that the number of new cases (incidences) of liver cancer continues to increase in Belgium.



Two models are proposed to model this evolution:

$$f(t) = 32.7818t + 450.78$$

$$g(t) = 463.93 \times 1.0123^t$$

where t is the time in years from 2010.

a) Using the calculator, **determine** for each of the two models in which year Belgium will reach 1 000 new cases of liver cancer per year. — 2 marks

At the end of 2021, 803 new cases of liver cancer were detected.

b) **Calculate**, using each of the two models, the projected number of new cases of liver cancer in Belgium in 2021. **Compare** the results obtained with the number actually observed and **deduce** the most appropriate model for the situation. — 4 marks

c) **Calculate** $\int_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t$ and **interpret** the result obtained in the context described in the statement. — 2 marks

Studies show that several risk factors may be involved in the occurrence of liver cancer. Among these factors is an infection with the hepatitis C virus.
In Belgium, 1% of the population is infected with the hepatitis C virus.
There is a test for this virus with the following properties:

- The probability of an infected person having a positive test is 0.98 (sensitivity of the test).
- The probability of an uninfected person having a negative test is 0.97 (specificity of the test).

A randomly selected person from the Belgian population is tested at random.
We define the following events :

- V the event "the person is infected with hepatitis C virus"
- T the event "the test is positive".

d) **Write** this information with correct mathematical probability notations. — 3 marks

e) **Represent** the given situation using a probability tree. — 3 marks

f) **Demonstrate** that the probability of the test being positive is 0.0395. — 2 marks

g) A person has just received the result of his test: negative. **Determine** the probability that this person is indeed not infected with the virus. Round the answer to 4 decimal places. — 3 marks

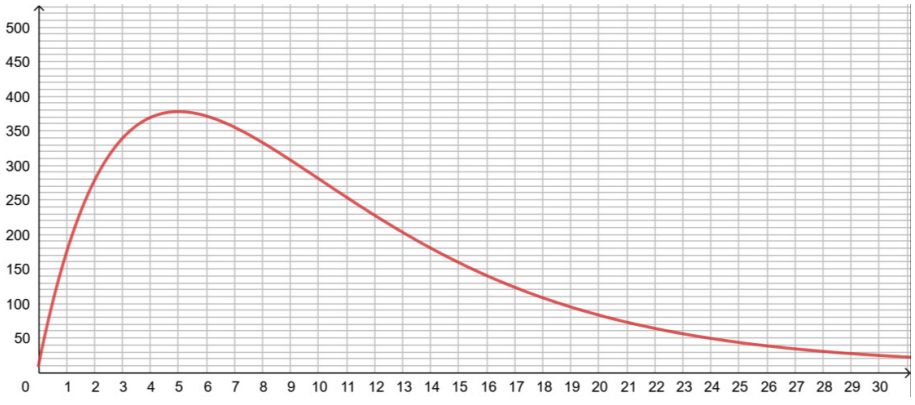
20 people from the population are chosen at random. The "draws" are considered independent.
The random variable X gives the number of people infected with the hepatitis C virus among these 20 people.

h) **Calculate** the probability that there are at least two infected people among the 20. Round this result to 4 decimal places. — 3 marks

An infection with the Hepatitis C virus results in a change in the number of white blood cells (immune cells involved in the body's defence mechanisms) in the blood that irrigates the liver.
The white blood cell count was measured in a patient within 30 days of the infection with the hepatitis C virus.
The evolution of the white blood cell count can be modeled by the following function, shown in the graph below :

$$f(x) = 200x \cdot e^{-\frac{x}{5}} + 10$$

White blood cell count ($\times 10^9$ cells per liter of blood)



Time (days)

i) Using this model, **determine** the rate of change in the white blood cell count 3 days after the infection. — 3 marks

Exercise 25 Calc. : ✓

Partie 1

Le tableau ci-dessous montre le prix du blé dur en par tonne pour la période 2016–2021.

Année		2016	2017	2018	2019	2020	2021
Années après 2016	x	0	1	2	3	4	5
Prix du blé (par tonne)	y	110	140	145	170	266	341

a) **Tracer** un nuage de points pour représenter les données du tableau. — 2 marks

b) **Déterminer** l'augmentation annuelle moyenne du prix du blé dur de 2016 à 2021. — 1 mark

c) **Établir** une équation sous chacune des formes $y = K \cdot A^x$ et $y = K \cdot e^{a \cdot x}$ de la régression exponentielle de y en x en utilisant les données du tableau. — 4 marks

Donner les constantes A et a à 0,001 près (3 décimales).

En d) et e), utiliser le modèle exponentiel $g(x) = 104 \cdot e^{0,22x}$ pour le prix en par tonne de blé dur x années après 2016.

d) **Estimer** le prix du blé dur en par tonne en 2023. — 1 mark

e) **Comparer** $g'(4)$ et $g'(5)$. **Expliquer** ce que ces deux valeurs révèlent sur le prix du blé. — 3 marks

Partie 2

Deux exploitations agricoles A et B produisent du blé. Les récoltes de blé sont acheminées vers un site de transformation qui transforme le blé en semoule ou en farine et le conditionne en sacs.
40% du blé utilisé sur le site de transformation provient de l'exploitation A et le reste de l'exploitation B.
45% du blé de l'exploitation A est utilisé pour produire de la farine.
70% du blé de l'exploitation B est utilisé pour produire de la semoule.
Sur le site de transformation, un sac est choisi au hasard.

f) **Calculer** la probabilité que le sac contienne de la farine et que le blé provienne de l'exploitation A. — 2 marks

g) Étant donné que le sac contient de la semoule, **calculer** la probabilité que le blé provienne de l'exploitation B. — 3 marks

Partie 3

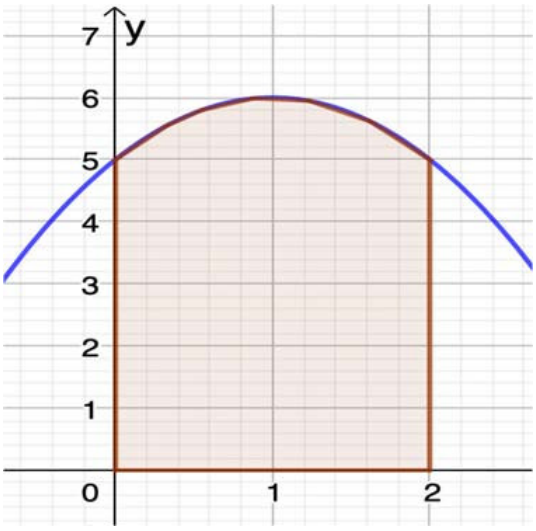
La région dans laquelle se trouve l'exploitation B est touchée par la septoriose, une maladie qui affecte différents types de plantes, dont le blé. L'exploitation B traite toutes ses parcelles de blé. Des études menées dans la région ont permis d'estimer que pour le blé traité, 12% sont atteints par cette maladie.
On examine le blé à 25 points de contrôle choisis au hasard dans l'exploitation B.

h) **Déterminer** la probabilité qu'au plus un de ces points de contrôle contienne du blé affecté par cette maladie. — 3 marks

i) **Déterminer** l'espérance du nombre de points de contrôle affectés par cette maladie. — 2 marks

Partie 4

La surface ombrée de la figure ci-dessous représente une parcelle de blé de l'exploitation A.
La surface est délimitée par le graphique de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ et l'axe des abscisses pour $0 \leq x \leq 2$.



j) Une fonction F est définie par

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x.$$

Montrer que F est une primitive de f. — 2 marks

k) **Calculer** l'aire de la surface ombrée. — 2 marks

Exercise 26 Calc. : ✓

Partie 1

La voiture électrique VOLTWAGEN est testée sur une piste d'essai courte et droite. La voiture parcourt la piste d'essai en 8 secondes et la vitesse v (en m/s) de la voiture électrique peut être modélisée par

$$v(t) = -2t^2 + 16t,$$

où t est le temps en secondes, $0 \leq t \leq 8$.

a) **Déterminer** $v'(t)$ et **interpréter** la signification de la dérivée dans ce contexte. 3 marks

b) **Calculer** $\int_0^8 v(t)\,\mathrm{d}t$ et **interpréter** la signification du résultat dans ce contexte. 3 marks

c) **Calculer** la vitesse maximale de la voiture sur la piste d'essai. 3 marks

Partie 2

En 2018, le nombre de Voltwagens vendues était de 3 325. Les années suivantes, le nombre de voitures vendues a augmenté de 8,2% par an.

d) **Calculer** le nombre de voitures vendues en 2022. 2 marks

e) On considère la fonction f, où $f(x)$ est le nombre de voitures vendues x années après 2018.
Résoudre l'équation $f(x) = 5\,000$ et **interpréter** le résultat. 3 marks

f) **Déterminer** le temps de doublement, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que le nombre de voitures vendues double. 3 marks

Partie 3

Le constructeur affirme que 90% des Voltwagens peuvent parcourir 700 km avec une seule charge. Un groupe dutilisateurs de ces voitures soupçonne que les batteries ne sont pas aussi bonnes. Un institut de recherche contrôle 80 Voltwagens choisies au hasard. Le contrôle montre que 66 des 80 voitures peuvent parcourir 700 km avec une seule charge.
Pour vérifier l'affirmation du constructeur, l'institut effectuera un test d'hypothèse au seuil de signification de 5%.

g) **Formuler** l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1. 2 marks

h) **Expliquer** si le test est effectué à gauche ou à droite. 2 marks

i) La variable aléatoire X décrit le nombre de voitures d'un échantillon de 80 Voltwagens, pouvant parcourir 700 km avec une seule charge de la batterie.
En supposant que H_0 est vraie, **calculer** la probabilité que X soit inférieure ou égale à 66. 4 marks
Conclure par conséquent si l'hypothèse H_0 est rejetée ou non.

Exercise 27 Calc. : ✓

Utilisez votre calculatrice pour les questions b), c), d), e), f), h), i), j) et m)

Frog and Toad, Arnold Lobel, 1970–1979

La valeur d'un vélo en euros, en fonction du temps t en années, est donnée par la fonction f avec $f(t) = 750 + 2\ 250 \cdot e^{-0,2t}$.

a) Calculer la valeur du vélo à l'achat.	1 mark
b) Calculer la valeur du vélo après un an et après trois ans.	2 marks
c) Combien le vélo a-t-il perdu en valeur au cours de la première année ? (arrondir la réponse à l'euro près)	1 mark
d) De quel pourcentage la valeur a-t-elle diminuée après trois ans ? (arrondir à 1% près)	3 marks
e) Résoudre l'équation $f(t) = 1\ 500$ et interpréter le résultat.	3 marks
f) Déterminer la valeur à long terme du vélo en se basant sur ce modèle.	2 marks
g) Calculer la dérivée $f'(t)$.	2 marks
h) Calculer $f'(5)$ et interpréter le résultat.	2 marks

Tandem, Marke William, 1950

Un moteur à essence de 48 cm^3 est monté sur le vélo.
La consommation en carburant mesurée en litres pour 100 km peut être modélisée en fonction de la vitesse x en km/h par la fonction $h(x) = 0,04x + \frac{25}{x}$.

i) Représenter graphiquement la fonction h pour $5 \leq x \leq 50$ en utilisant les valeurs du tableau suivant. — 2 marks

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$h(x)$										

Arrondir les valeurs de la fonction au dixième près.
Du papier millimétré est disponible.

j) Calculer la consommation en carburant à 25 km/h en litres pour 100 km. — 1 mark

k) Lire graphiquement la vitesse x pour laquelle la consommation en carburant est minimale. — 2 marks

l) Calculer une primitive de la fonction h. — 2 marks

m) Le vélo est poussé et démarre à une vitesse de 5km/h. Il est ensuite accéléré de manière régulière jusqu'à une vitesse de 50 km/h. — 2 marks

Calculer l'intégrale $\int_5^{50} h(x)\,\mathrm{d}x$ à la calculatrice. Arrondir à l'entier près.

Remarque (Ceci n'est pas une question !): Le calcul $\frac{1}{45}\int_5^{50} h(x)\,\mathrm{d}x$ *correspond à la consommation moyenne de carburant lors d'une accélération de 5 km/h à 50 km/h.*

Exercise 28 Calc. : ✓

Utilisez votre calculatrice pour les questions a, b, c, d, e, g, i, et k. *Les résultats numériques doivent être arrondis à l'entier le plus proche.* Jane démarre une entreprise en ligne et utilise les réseaux sociaux pour la promouvoir. Le nombre hebdomadaire de visiteurs sur son site web est modélisé par la fonction $f(t) = 15 \cdot \ln(3t + 1)$, où t est le temps en semaines, avec $0 \leq t \leq 52$, et $f(t)$ le nombre de visiteurs en centaines.	
a) Calculer le nombre de visiteurs au cours de la première et de la dernière semaine de l'année à l'aide de ce modèle.	2 marks
b) Calculer le nombre total de visites sur le site web au cours des trois premières semaines.	2 marks
c) Combien de semaines a-t-il fallu avant que le nombre total de visites dépasse les 20 000 ?	4 marks
d) Calculer l'intégrale $\int_0^{26} f(x)\,\mathrm{d}x$ à la calculatrice, et interpréter le résultat dans cette situation.	3 marks
e) Calculer $f'(26)$ arrondi au centième près, et interpréter le résultat.	3 marks
Jane suppose que le taux d'augmentation du nombre de visiteurs sera constant à partir de la semaine 26, et que ce taux sera égal à $m = 0,6$. Elle modélise le nombre de visiteurs (en centaines) pour $26 \leq t \leq 52$ par la fonction $g(t) = 0,6 \cdot t + 50$.	
f) Expliquer comment Jane a trouvé l'expression de la fonction $g(t)$.	2 marks
g) Calculer le nombre de visiteurs attendus par Jane au cours de la dernière semaine de l'année selon ce modèle.	1 mark
h) Ecrire une intégrale qui permet de calculer le nombre total de visites au cours des 26 dernières semaines.	2 marks

Au bout du compte, il y avait 7820 visiteurs la dernière semaine de la première année.	
i) Lequel des deux modèles donne la prédiction la plus précise de ce nombre ?	2 marks
Jane vend un support de micro en métal sur son site web. La forme de ce support est un solide de révolution obtenu en faisant tourner le graphe de la fonction $h(x) = \dfrac{4}{0,5x - 1,4}$ pour $-5 \leq x \leq 2$ autour de l'axe des abscisses. L'unité de longueur est le centimètre.	
j) Écrire l'intégrale pour obtenir le volume du solide de révolution en utilisant la formule $V = \int_a^b \pi\,(f(x))^2\,\mathrm{d}x$.	2 marks
k) Calculer le volume de métal utilisé pour fabriquer le support de micro, arrondi au cm^3 près.	2 marks

Exercise 29 Calc. : ✓

Partie 1

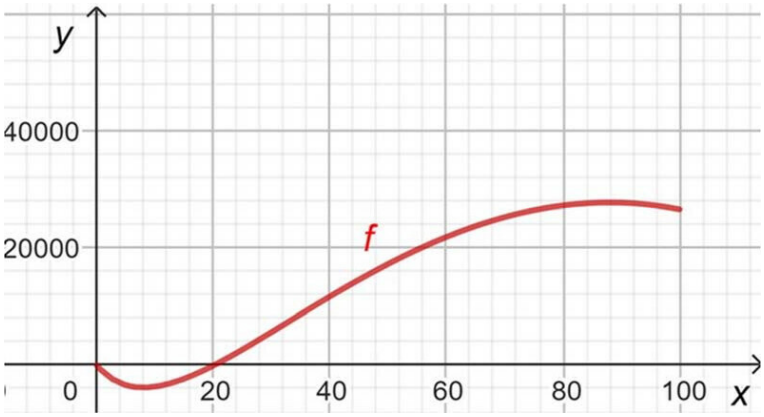
On utilise les pommes d'un verger pour produire du jus de pomme. Étant donnée la taille du verger, la quantité de jus produite par an ne peut excéder 100 tonnes.

Le résultat net (bénéfice ou déficit), en euros, réalisé par le fermier est modélisé par

$$f(x) = 2160x - 10x^2 - 40\,000 \ln\left(\frac{x+12}{12}\right)$$

où x est le nombre de tonnes de jus de pomme.

Le diagramme ci-dessous montre le graphique de la fonction f.



a) **Calculer** le bénéfice réalisé par la vente de 50 tonnes de jus de pomme. 1 mark

b) **Déterminer** le nombre de tonnes de jus de pomme que le fermier doit produire pour obtenir un bénéfice (résultat net positif). Arrondir à un nombre entier de tonnes. 3 marks

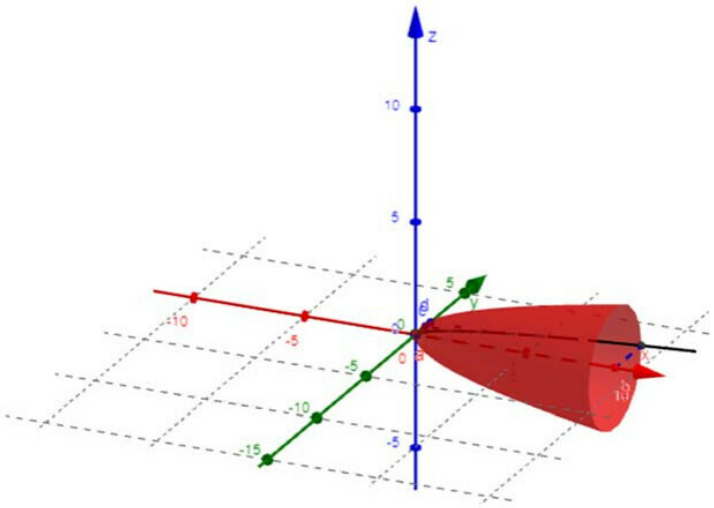
c) La dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x) = 2160 - 20x - \frac{40\,000}{x+12}$$

Utiliser la dérivée pour **déterminer** le nombre de tonnes de jus de pomme à produire pour obtenir le bénéfice maximum. **Calculer** ce bénéfice maximum. 4 marks

Partie 2

Le fermier souhaite organiser une dégustation.
Pour cet événement, il prévoit d'utiliser des verres dont la forme est modélisée par la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{0,8x}$ dont on fait tourner le graphique autour de l'axe des abscisses pour $0 \leq x \leq 9$.
Le résultat est illustré sur la figure ci-dessous.



d) Pour calculer le volume d'un tel solide de révolution, on utilise la formule :

$$V(x) = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

Si x est mesuré en cm, le volume $V(x)$ sera donné en cm^3.

Calculer le volume d'un verre et donner la réponse en litres. Arrondir à deux décimales. — 2 marks

e) On doit aussi dresser des tables pour la dégustation. La société qui fournit les verres les propose en 6 couleurs différentes. On dispose également de 3 tailles différentes de serviettes.

Déterminer de combien de façons on peut dresser une table en utilisant des verres de 2 couleurs différentes avec des serviettes de 2 tailles différentes. — 2 marks

f) Pour la publicité de l'événement, le fermier souhaite utiliser le slogan suivant :

Manger des pommes rend heureux.

On a effectué un sondage dont les résultats sont regroupés dans le tableau suivant, où

X est le nombre de pommes consommées par semaine et

Y est l'évaluation du bonheur personnel sur une échelle allant de 1 à 10

X	4	9	5	2	1	0	9	7	5
Y	5	4	9	6	4	5	8	4	2

.

Déterminer le coefficient de corrélation de Pearson et **justifier** si le slogan est correct ou non, sur la base des statistiques. — 3 marks

Partie 3

Le fermier utilise différentes sortes de pommes de son verger pour produire de la salade de fruits :

60% de pommes *Elstar* et 40% de pommes *Boskoop.*

On admet que pour cette salade de fruits, 97% des pommes *Elstar* et 95% des pommes *Boskoop* sont de bonne qualité.

g) Le fermier prélève une pomme au hasard pour la contrôler.

Montrer que la probabilité que la pomme soit de mauvaise qualité est de $0,038$. — 3 marks

Le fermier conditionne ses pommes dans des boîtes de 60.
On note Y la variable aléatoire qui désigne le nombre de pommes de mauvaise qualité par boîte.

h) **Justifier** que Y suit une loi binomiale. — 3 marks

i) On choisit une boîte au hasard.

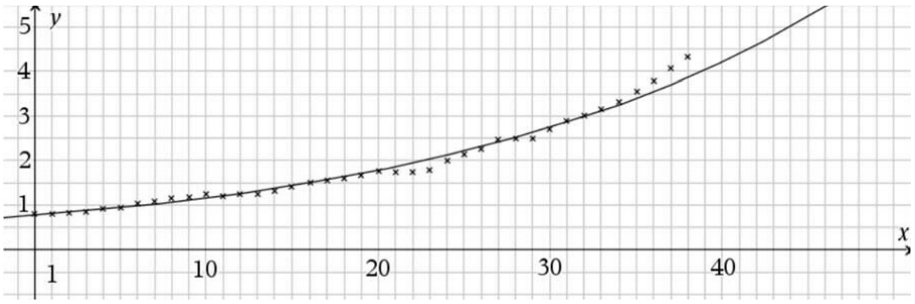
Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 2 pommes de mauvaise qualité dans la boîte. Arrondir à deux décimales. — 2 marks

j) **Calculer** $E(Y)$ et **expliquer** la signification du résultat. — 2 marks

Exercise 30 Calc. : ✓

Partie 1

Le diagramme ci-dessous montre lévolution du nombre de passagers du transport aérien mondial entre 1980 et 2018, ainsi que le graphique dune fonction exponentielle f qui modélise cette évolution.
Au nombre x dannées après 1980 correspond le nombre $f(x)$ de passagers en milliards.



a) Le modèle exponentiel donné est-il pertinent ? **Justifier** la réponse. — 2 marks

b) On considère les définitions du modèle f suivantes :

$$f_1(x) = 0,75 \cdot e^{0,043x} \quad ; \quad f_2(x) = e^{0,043x} \quad ; \quad f_3(x) = 0,75 \cdot e^{-0,043x}$$

Désigner la définition qui correspond le mieux au graphique représenté ci-dessus et **justifier** la réponse. — 3 marks

c) On considère le modèle $f(x) = e^{0,0431x-0,284}$

Calculer le nombre de passagers que ce modèle permet de prévoir en 2023. Ce modèle a-t-il encore un sens en 2023 ? **Justifier** la réponse. — 3 marks

Partie 2

On estime que la probabilité qu'un passager du transport aérien ne se présente pas lors du décollage est de $0,05$.
Une compagnie aérienne qui vend des places pour un avion de 100 places, décide d'en vendre 103 pour faire du surbooking et espère ainsi réaliser des bénéfices supplémentaires si certains passagers ne se présentent pas au départ.

d) **Calculer** la probabilité qu'au moins un passager qui se présente au départ ne trouve pas de place dans l'avion. Arrondir à 5 décimales. — 3 marks

e) Les billets de cet avion sont vendus à 200 l'unité. Si un passager se présente et n'a pas de place dans l'avion, la compagnie lui doit 800 de dédommagement.

On obtient alors le tableau suivant, où X désigne le nombre de passagers qui se présentent au départ, et Y l'impact du surbooking , en euros, sur le résultat de la vente des billets, en fonction de X.

X	≤ 100	101	102	103
Y	+600	−200	−1000	−1800
Probabilité	0,8935	0,0739	0,0275	0,0051

.

Calculer $E(Y)$ et **interpréter** le résultat. Est-il avantageux pour cette compagnie de faire du surbooking ? — 4 marks

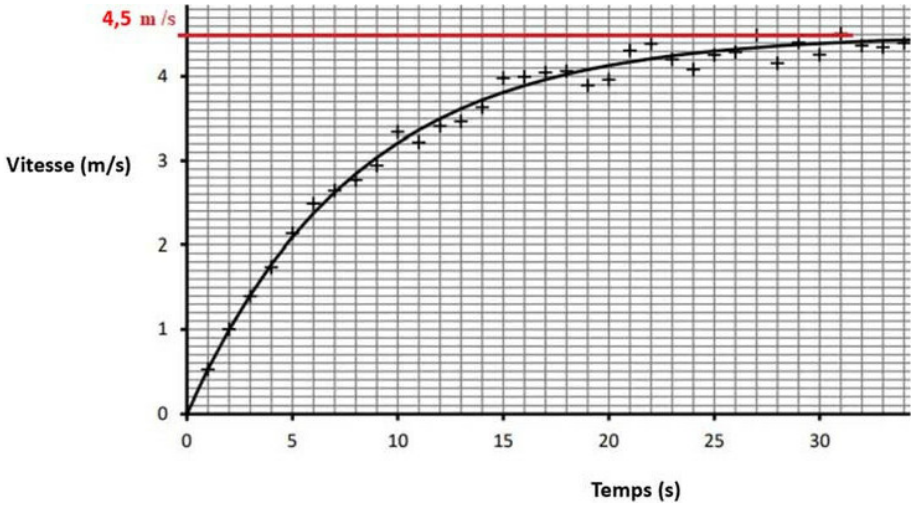
Partie 3

Afin de réduire les nuisances sonores et les émissions de CO2, le déplacement d'un avion au sol se fait sans utiliser ses moteurs principaux (réacteurs), mais des moteurs électriques. L'avion, initialement à l'arrêt, démarre sur un sol horizontal ; la puissance des moteurs électriques ne lui permet pas de dépasser une vitesse maximale $v_{\max}$.

La vitesse de l'avion, exprimée en mètres par seconde (m/s), est modélisée par la fonction v définie par

$v(t) = 4,5 \cdot \left(1 - e^{0,13t}\right)$, où $t \geq 0$ est le temps exprimé en secondes (s).

Le diagramme ci-dessous montre le graphique de cette fonction ; les croix représentent les valeurs expérimentales.



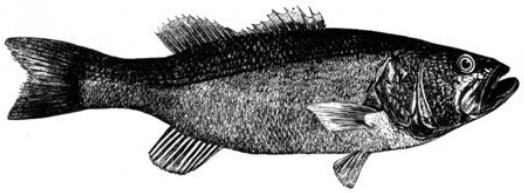
f) **Déterminer** la limite de la fonction v en plus l'infini et **interpréter** le résultat. 3 marks

g) **Déterminer** l'accélération initiale de l'avion. 3 marks

h) **Calculer** $\int_{10}^{20} v(t)\,\mathrm{d}t$ et **interpréter** le résultat. 4 marks

Exercise 31 Calc. : ✓

Partie 1



Une population de bars noirs est introduite dans un lac. Le nombre de poissons dans le lac est modélisé par la fonction N définie par

$$N(t) = 3500 \cdot e^{0{,}0862 \cdot t}, \quad t \geq 0,$$

où t est le temps en jours après l'introduction.

a) **Interpréter** le nombre 3500 dans ce contexte. — 1 mark

b) **Calculer** le nombre de poissons dans le lac après une semaine. **Donner** la réponse arrondie à l'entier le plus proche. — 2 marks

c) **Réécrire** la formule de $N(t)$ sous la forme $N(t) = K \cdot A^t$. — 2 marks

d) **Déterminer** le pourcentage de croissance du nombre de poissons par jour. — 2 marks

e) **Déterminer** après combien de jours le nombre de poissons dans le lac aura doublé. — 2 marks

f) **Expliquer** si ce modèle peut être utilisé sur une longue période. — 1 mark

Partie 2

Il est assez difficile de capturer un marlin bleu. Ils se battent avec acharnement lorsqu'ils sont accrochés à un hameçon.

En 2022, 5300 pêcheurs sur un total de 300 000 ont réussi à capturer un marlin bleu.
En 2023, 149 pêcheurs sur un échantillon aléatoire de 7000 pêcheurs ont réussi à capturer un marlin bleu.
Pour déterminer si la proportion de pêcheurs ayant capturé un marlin bleu a augmenté entre 2022 et 2023, on effectue un test d'hypothèse à un seuil de signification de 5%.
Soit p la proportion de pêcheurs qui ont réussi à capturer un marlin bleu en 2023.

g) **Vérifier** que l'hypothèse nulle pour ce test est $H_0 : p = 0,0177$. — 2 marks

h) **Déterminer** si le test est unilatéral à gauche ou à droite. **Justifier** la réponse. — 2 marks

i) **Calculer** la probabilité que le nombre de pêcheurs ayant réussi à capturer un marlin bleu à partir d'un échantillon aléatoire de 7000 pêcheurs soit supérieur ou égal à 149, en supposant que H_0 est vraie. — 5 marks

Décider si H_0 peut être rejetée. **Justifier** cette décision.

Partie 3

Les saumons adultes vivent en pleine mer mais retournent dans les ruisseaux et rivières d'eau douce pour pondre leurs ufs. C'est ce qu'on appelle la migration reproductive. Les scientifiques ont commencé à enregistrer la migration en 2010.
La population de saumons migrateurs peut être modélisée par la fonction P définie par

$$P(t) = a \cdot \sin(0,5t) + d,$$

où t est le temps en années après 2010.
En 2013, ils ont enregistré 48 000 saumons migrateurs, soit la population la plus importante à migrer. En 2019 ils ont enregistré 17 000 saumons, soit la population la plus faible à migrer.

j) **Montrer** que l'amplitude a de la fonction P est de 15 500 et que le déplacement vertical d est de 32 500. — 2 marks

k) **Déterminer** la population attendue de saumons migrateurs en 2024. — 2 marks

l) La pêche au saumon est suspendue lorsque la population descend en dessous de 21 000 saumons.

Déterminer après combien d'années cela devrait se produire pour la première fois depuis le début de l'enregistrement. — 2 marks

Exercise 32 Calc. : ✓

Partie 1

Le tableau suivant montre le revenu y, en millions d'euros, d'une ligue de basket-ball x années après 2006.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	34,1	43,1	49,5	59,3	59,4	60,9	76,9	86,6	90,8	97,8

a) **Représenter** les données ci-dessus par un nuage de points. 2 marks

b) En utilisant les données du tableau, **établir** une équation de la droite de régression de y en x. Donner la réponse à 3 décimales. 3 marks

Tracer la droite de régression sur le même diagramme.

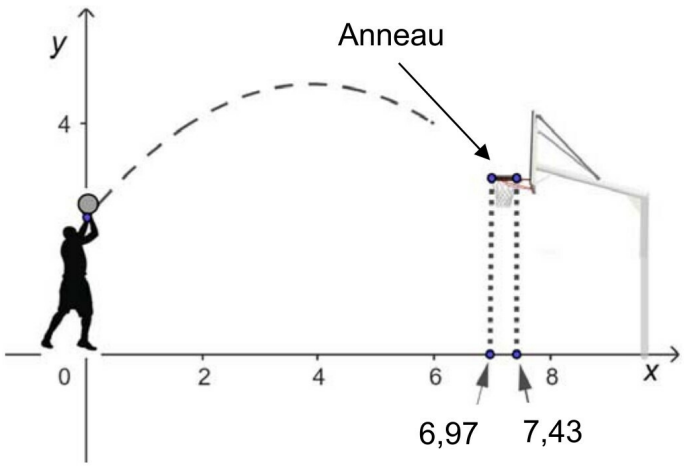
Dans la suite, utiliser le modèle $y = 6,95 \cdot x + 34,56$.

c) Selon le modèle, **estimer** le revenu attendu pour 2016. 2 marks

d) Un revenu de 114 millions d'euros a été généré en 2017 et de 120 millions d'euros en 2018.

Expliquer si le modèle de régression linéaire ci-dessus semble approprié après 2015. 2 marks

Partie 2



Un lancer réussi au basket-ball peut être obtenu lorsque le ballon traverse l'anneau de manière abrupte et centrale. Dans le modèle suivant, on suppose que le lancer est dirigé vers l'anneau. La trajectoire du point le plus bas du ballon est modélisée par la fonction f définie par

$$f(x) = -0,153x^2 + 1,19x + 2,36 \ ,$$

où x est la distance horizontale depuis le point de lancement (mesurée le long du sol) en mètres et $y = f(x)$ est la hauteur en mètres au-dessus du sol.

e) **Calculer** $f(0)$ et **interpréter** le résultat. 2 marks

f) L'anneau est situé à $3,05$ mètres au-dessus du sol. La distance horizontale du point de lancement au point le plus proche de l'anneau est de $6,97$ mètres et au point le plus éloigné, elle est de $7,43$ mètres. Le diamètre du ballon est de 24 cm.

Calculer $f(6,97)$ et $f(7,43)$. **Expliquer** si le lancer pourrait être réussi. 3 marks

g) **Résoudre** l'équation $f'(x) = -1$. 3 marks

Interpréter le résultat dans le contexte de la trajectoire du ballon.

h) **Déterminer** la longueur de la trajectoire suivie par le ballon pour atteindre le point correspondant à une distance horizontale de $7,15$ mètres du point de lancement. 2 marks

Utiliser la formule de la longueur d'un arc de courbe : $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

Partie 3 On suppose qu'à chaque lancer franc, Bob a une probabilité de 87,7% de marquer.	
i) Bob va effectuer 10 lancers francs. **Calculer** la probabilité que Bob marque plus de 8 fois.	3 marks
j) **Déterminer** le nombre de lancers francs nécessaires pour que Bob marque plus de 12 fois avec une probabilité de plus de 95%.	3 marks

Exercise 33 Calc. : ✓

Partie 1

20 carpes sont introduites dans un lac artificiel. L'étang a des ressources limitées et la population de carpes est modélisée par la fonction N, définie par $N(t) = \dfrac{200}{1 + k \cdot 2^{-t}}$, où t est le temps exprimé en nombre entier d'années et k est un paramètre réel.
Les carpes ne pondent leurs œufs qu'une fois tous les douze mois.

a) Sur la base des informations données dans l'introduction, **vérifier** que $k = 9$. — 2 marks

b) **Déterminer** le temps nécessaire pour que la population dépasse les 90 individus. — 2 marks

c) **Calculer** la population de carpes après 15 ans et après 20 ans. — 3 marks

Décrire l'évolution de la population sur une longue période.

Partie 2

La longueur moyenne des poissons tétra dans un étang d'eau douce est bien modélisée par une distribution normale de moyenne $\mu = 8$ cm et d'écart-type $\sigma = 2$ cm.

d) **Calculer** la probabilité qu'un poisson tétra choisi au hasard dans l'étang ait une longueur :

i) supérieure à 8 cm, — 2 marks

ii) comprise entre 6 cm et 8 cm. Arrondir le résultat à la troisième décimale. — 2 marks

e) La probabilité qu'un poisson tétra choisi au hasard dans l'étang ait une longueur supérieure à 6 cm est de $0,84$.

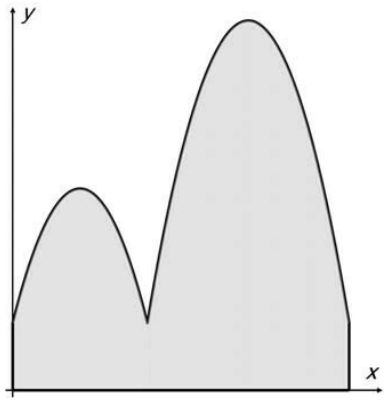
Il y a actuellement 65 poissons tétra dans l'étang.

Calculer la probabilité que moins de 50 de ces poissons mesurent plus de 6 cm de long. — 2 marks

Partie 3

Le dessin de la surface d'un étang d'eau douce dans un centre d'élevage de truites est représenté par la surface ombrée de la figure. Le contour de la surface suit :

- à gauche, une parabole d'équation $y = -x^2 + 4x + 2$,
- à droite, une parabole d'équation $y = -x2 + 14x - 38$,
- les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 10$.



L'unité de mesure sur les deux axes est le mètre.

f) **Déterminer** l'aire de la surface de l'étang. — 4 marks

Partie 4

Le secteur de la pêche aux coquillages en Italie a subi une baisse des captures entre 2010 et 2019, comme le montre le tableau suivant :

x : nombre d'années depuis 2010	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y : masse des coquillages capturés, en tonnes	235	230	220	200	194	190	185	177	175	172

g) **Tracer** un nuage de points représentant les données du tableau, **interpréter** le diagramme et **décrire** la corrélation. — 4 marks

h) **Établir** une équation, de la forme $y = mx + b$, de la régression linéaire de y en x et utiliser ce modèle pour **estimer** la masse des coquillages capturés en 2020. — 4 marks

Exercise 34 Calc. : ✓

Partie 1

Une enquête a été menée auprès des vacanciers sur leurs activités sportives pendant leurs vacances. L'enquête a révélé que 45% des vacanciers se sont rendus dans une salle de sport pendant leurs vacances et que 60% d'entre eux sont allés nager.
Parmi les vacanciers qui ne se sont pas rendus dans une de salle de sport, 70% sont allés nager.
Un vacancier est choisi au hasard.
On considère les événements suivants :
S : le vacancier s'est rendu dans une salle de sport ;
N : le vacancier est allé nager .

a) **Construire** un diagramme en arbre décrivant la situation. — 2 marks

b) **Décrire** avec des mots l'événement $\mathrm{S} \cap \mathrm{N}$. — 1 mark

c) **Montrer** que $P(\mathrm{N}) = 0,655$. — 2 marks

d) **Calculer** la probabilité qu'un vacancier choisi au hasard se soit rendu dans une salle de sport étant donné qu'il est allé nager. Arrondir le résultat à quatre décimales. — 2 marks

On choisit au hasard 4 vacanciers.
Soit X la variable aléatoire qui désigne le nombre de ces vacanciers qui sont allés nager pendant leurs vacances.
Le nombre de vacanciers étant suffisamment grand, on admet que la variable aléatoire suit une loi binomiale.

e) **Calculer** la probabilité que : — 5 marks

i) exactement 2 des vacanciers soient allés nager pendant leurs vacances,

ii) au moins 3 des vacanciers soient allés nager pendant leurs vacances.

Arrondir les réponses à trois décimales.

Partie 2

Certaines personnes se sont inscrites à un cours de tennis pendant leurs vacances.
En attendant de commencer, ils regardent un canon tirer des balles de tennis qui s'élèvent légèrement à la sortie du canon et passent ensuite au-delà du milieu du terrain.
La hauteur du centre de la balle exprimée en fonction du temps peut être modélisée par la fonction h définie par :

$$h(t) = -4,9t^2 + 4,2t + 0,5\,,$$

où t est le temps, en secondes, après que la balle a quitté le canon et $h(t)$ est exprimée en mètres.
Le rayon d'une balle de tennis est de $3,4$ cm.

f) **Déterminer** le temps en secondes au bout duquel la balle touchera le sol, en notant que le centre de la balle sera à $3,4$ cm au-dessus du sol. Arrondir la réponse à 2 décimales. — 2 marks

g) **Déterminer** la hauteur maximale atteinte par le centre de la balle. — 2 marks

La hauteur du centre de la balle peut également s'exprimer en fonction de la distance horizontale parcourue par le centre de la balle et peut être modélisée par la fonction f définie par :

$$f(x) = -0,00784x^2 + 0,168x + 0,5\,,$$

où x est la distance horizontale, en mètres, parcourue par le centre de la balle depuis sa sortie du canon et $f(x)$ est exprimée en mètres.
Au milieu du terrain, le haut du filet est à $0,9$ mètre au-dessus du sol.
Le filet est horizontalement distant du canon de $11,88$ mètres.

h) **Montrer** que la balle passera au-dessus du filet. — 2 marks

La distance du canon à l'extrémité opposée du terrain est de $23,76$ mètres.

i) **Montrer** que le modèle prédit que la balle ne touchera pas le sol à l'intérieur du terrain. — 2 marks

Le modèle quadratique présenté ci-dessus ne tient pas compte de la résistance de l'air. Un modèle ajusté est proposé avec la fonction g définie par : $$g(x) = -0,00784x^2 + 0,168x + 0,5 - 0,0003x^3\,,$$ où x et $g(x)$ sont des mesures définies de la même manière que x et $f(x)$.	
j) **Déterminer** si la pente selon laquelle la balle quitte le canon est la même pour f et g.	2 marks
k) **Déterminer** si la nouvelle fonction g fournirait un modèle pour la trajectoire de la balle quittant le canon à 50 cm de hauteur et atterrissant à l'intérieur de la partie opposée du terrain.	3 marks

Exercise 35 Calc. : ✓

Dans cette question, les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Partie 1.

Les montres de sport sont des montres qui peuvent se porter au poignet pendant des activités sportives. Beaucoup de gens utilisent ces montres.
Parmi ces montres de sport, le modèle Sporty est très populaire. La probabilité qu'une personne utilisant une montre de sport prise au hasard ait le modèle Sporty est de 60%.
Nous considérons un échantillon de 500 personnes prises au hasard parmi celles utilisant une montre de sport. La variable aléatoire X donne le nombre de personnes dans cet échantillon qui possèdent le modèle Sporty.

a) **Expliquer** pourquoi X peut être modélisé par une loi binomiale et **donner** ses paramètres. — 2 marks

b) **Calculer** la probabilité qu'au moins 300 personnes dans cet échantillon possèdent le modèle Sporty. **Arrondir** à 2 décimales. — 2 marks

c) **Déterminer** l'espérance du nombre de personnes ayant une montre de sport de modèle Sporty dans cet échantillon. — 2 marks

d) **Calculer** l'écart-type de X. **Arrondir** à 3 décimales. **Interpréter** cette valeur dans le contexte. — 2 marks

Partie 2.

La montre de sport de modèle Sporty peut donner de manière très précise l'effort fourni pendant une course si la personne donne son poids.
Une femme de 60 kg court en montée pendant 30 minutes. Ainsi, son niveau d'effort n'est pas constant. Sa puissance de course peut être modélisée par la fonction suivante :

$$P(t) = -0,05t^2 + 3t + 66, \qquad \text{avec } 0 \leq t \leq 30$$

où t est en minutes et $P(t)$ en kJ/min (kilojoules par minute).

e) **Calculer** à quelle puissance court cette femme quand elle démarre sa course, et 15 minutes après son départ. — 3 marks

f) **Dessiner** le graphique de la fonction P sur l'ensemble de définition donné. — 3 marks

g) **Déterminer** à quel moment la puissance de course de cette femme est de 106 kJ/min. — 3 marks

Partie 3.

De nombreuses personnes utilisent internet pour acheter leur montre de sport de modèle Sporty, et demandent la livraison dans une boutique qui s'appelle ń RunAway ż.
Nous savons que 80% du temps, la Sporty arrive dans le délai prévu (sous quelques jours), 15% du temps elle arrive en retard (elle prend quelques semaines à arriver) et le reste du temps elle n'arrive pas du tout.
Nous savons aussi que lorsque la Sporty arrive dans le délai prévu, la probabilité que l'acheteur mette un ń J'aime ż à la boutique ń RunAway ż est de $0,9$; quand elle arrive en retard, la probabilité que l'acheteur mette un ń J'aime ż à la boutique est de $0,3$; et quand elle n'arrive pas du tout, la probabilité que l'acheteur mette un ń J'aime ż à la boutique est de $0,1$.
On choisit au hasard un utilisateur qui a commandé une montre Sporty en ligne et qui a choisi la livraison dans cette boutique.

h) **Dessiner** un arbre de probabilités représentant cette situation. — 3 marks

i) **Calculer** la probabilité que cet utilisateur mette un ń J'aime ż à la boutique ń RunAway ż. — 2 marks

j) Si on sait que la personne a mis un ń J'aime ż à la boutique, **donner** la probabilité que la Sporty qui a été commandée soit arrivée dans le délai prévu. — 3 marks

Exercise 36 Calc. : ✓

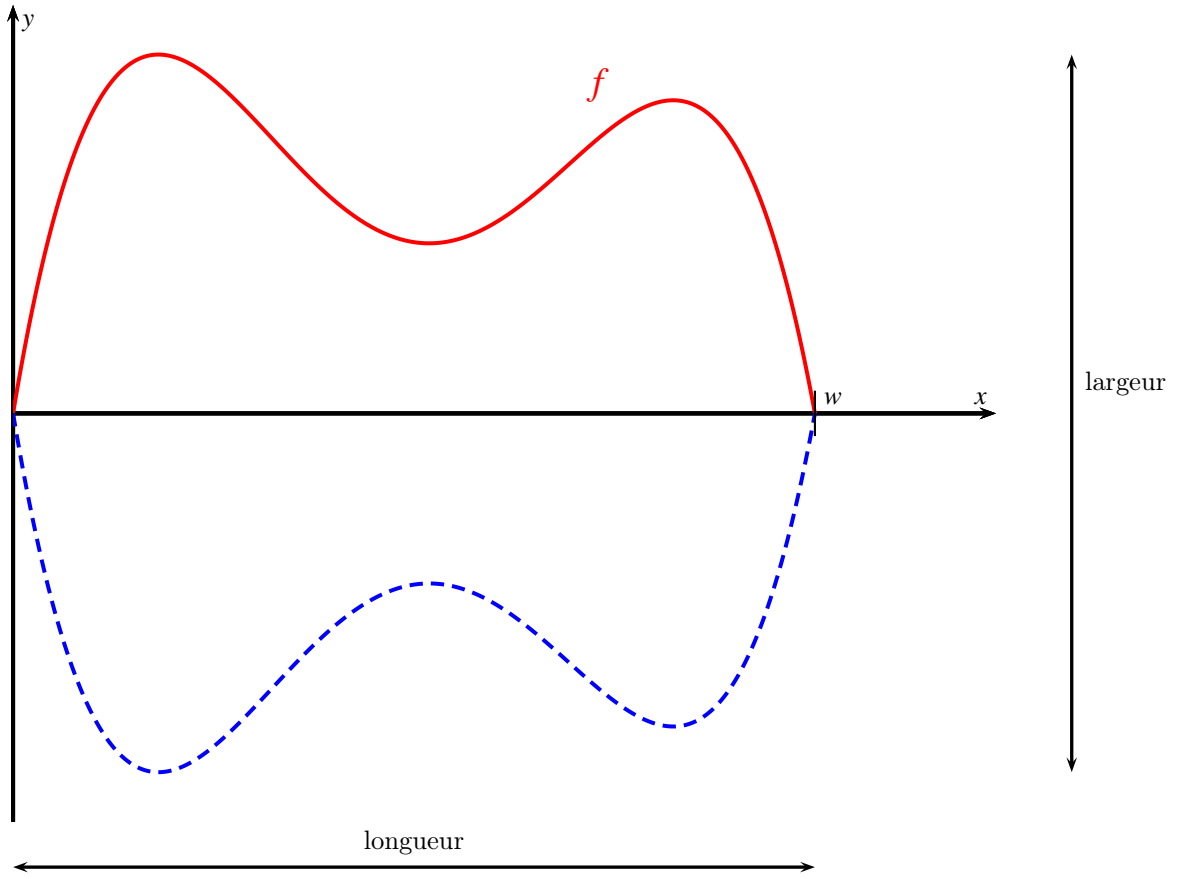
Dans cette question, les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1.

Un musicien joue de la guitare et souhaite modéliser sa forme. La caisse en bois principale peut être modélisée par l'équation suivante :

$$f(x) = -0,13x^4 + 1,4x^3 - 4,9x^2 + 6x$$

Le graphique suivant montre la courbe de f (en rouge, trait plein), ainsi que le symétrique de cette courbe, par rapport à l'axe des abscisses (en bleu, trait pointillé). Dans cette équation, x est en décimètres, et $f(x)$ est également en décimètres. La surface entre ces deux courbes forme la caisse en bois de cette guitare.



Comme on peut le voir sur le graphique, la fonction f est en fait définie de 0 à une valeur w, qui est l'autre solution de l'équation $f(x) = 0$.

a) **Déterminer** la valeur de w, en **arrondissant** à 3 décimales. **Donner** la longueur de la caisse en bois, en centimètres.	2 marks
b) **Déterminer** la valeur maximum de f, en **arrondissant** à 3 décimales. **Donner** la largeur de la caisse en bois, en centimètres.	2 marks
c) La fonction f a trois points stationnaires. Dans la question b) nous avons trouvé l'un d'entre eux. **Donner** les coordonnées des deux autres points stationnaires, en **arrondissant** à deux décimales.	4 marks
Avant un gros concert, notre musicien veut peindre le dos de la caisse en bois en noir. Nous voulons donc connaître l'aire de cette surface.	
d) **Déterminer** une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^{5,3} f(x)\,\mathrm{d}x$, en **arrondissant** à 3 décimales. **Donner** l'aire qui doit être peinte, en décimètres carrés.	3 marks

Partie 2.

Notre musicien ouvre une page web pour son groupe de musique, et s'intéresse au nombre de personnes qui s'abonnent à sa page au cours du temps ($x = 0$ quand la page web est créée). Le tableau ci-dessous montre le nombre d'abonnés pour les 20 premières semaines :

x = Temps (semaines)	2	4	5	8	10	11	12	13	16	18
y = Nombre d'abonnés	275	240	180	300	380	350	250	350	440	400

e) **Dessiner** un nuage de points pour représenter les données de ce tableau. 3 marks

f) **Calculer** le coefficient de corrélation linéaire. **Déterminer** si un modèle affine serait approprié pour ces données. **Discuter** comment on pourrait améliorer le modèle affine en le combinant avec un autre modèle. 3 marks

g) **Déterminer** une équation de la forme $y = a \cdot x + b$ de la droite de régression affine de y en x en utilisant ces données. **Arrondir** a et b à une décimale. 3 marks

Tracer la droite de régression sur le même graphique qu'en e).

Dans les questions h) et i), utiliser le modèle affine $f(x) = 20 \cdot x + 190$.

h) **Calculer** quand le nombre d'abonnés dépasserait 800. 3 marks

i) **Expliquer** pourquoi le modèle n'est pas approprié si on l'utilise pour un grand nombre de semaines. 2 marks

Exercise 37 Calc. : ✓

Part 1

A company launched an online service in 2020, and has seen rapid growth in the number of subscribers each year. The company believes that the growth follows an exponential model S given by:

$$S(t) = 5000 \cdot e^{0.3 \cdot t},$$

where $S(t)$ is the number of subscribers t years after 2020.

a) **Write down** the number of subscribers the company had in 2020. — 1 mark

b) **Estimate** the number of subscribers there will be in 2025. — 1 mark

c) **Determine** the annual growth rate as a percentage. — 2 marks

d) The company aims to reach 100 000 subscribers. **Determine** in which year this is likely to be achieved. — 2 marks

Part 2

The same company has been tracking its annual advertising spending and corresponding revenue for several years. The data are given in the table:

Year	Advertising Spending, x, in thousands of euros	Revenue, y, in thousands of euros
2020	20.5	149.8
2021	25.3	181.7
2022	30.2	200.5
2023	35.4	239.3
2024	40.1	261.4

e) **Represent** the above data on a scatter diagram. — 2 marks

f) **Determine** the equation of the regression line for the data, in the form $y = mx + p$, with m and p rounded to two decimal places. **Draw** the regression line on the same diagram. — 3 marks

g) **Interpret** the value of the correlation coefficient r. — 2 marks

h) Using the model $y = 5.7x + 33.8$, **estimate** the revenue if the company spends 50 thousand euros on advertising. — 2 marks

i) **Interpret** in context the values 5.7 and 33.8. — 3 marks

Part 3

The company observes that the number of customer orders each month follows a normal distribution with mean $\mu = 1200$ orders and standard deviation $\sigma = 150$ orders.

j) **Determine** the probability that in a given month the company will receive between 1000 and 1350 orders. — 2 marks

k) **Determine** the probability that the company will receive more than 1300 orders in a given month. — 2 marks

l) In an advertisement, the company claims that it has at least 800 orders each month. **Examine** whether this claim is valid. — 3 marks

Exercise 38 Calc. : ✓

Part 1

Yoghurts are often considered part of a healthy diet. Unfortunately, not all yoghurts are healthy, because flavouring may have harmful additives.
A wholesaler buys yoghurts from two suppliers: 80% from supplier A and 20% from supplier B. 10% of yoghurts from supplier A have flavouring and 20% of those from supplier B also have flavouring.
For the following parts a), b) and c), a yoghurt is chosen at random from the wholesaler's stock.

a) **Determine** the probability that the yoghurt comes from supplier B and has flavouring. — 2 marks

b) **Show** that the probability that the yoghurt has no flavouring is 0.88. — 3 marks

c) Given that the yoghurt has flavouring, **determine** the probability that it comes from supplier B. — 2 marks

d) The wholesaler has a large stock and sells packages of 10 yoghurts selected at random.
Determine the probability that all 10 yoghurts in a package chosen at random have no flavouring. — 3 marks

Part 2

Milk is important for our health because it provides us with nutrients such as protein. A cow produces milk for approximately 10 months after giving birth. Milk production in litres per day from a cow of a certain breed is modelled by the function f defined by:

$$f(t) = -0.00068t^2 + 0.1831t + 24, \quad 0 \leq t \leq 300,$$

where t is the time in days after the cow gives birth.

e) **Determine** $f'(200)$. **Interpret** its meaning in context. — 3 marks

f) **Examine** whether milk production of 40 litres per day is possible for this cow. — 2 marks

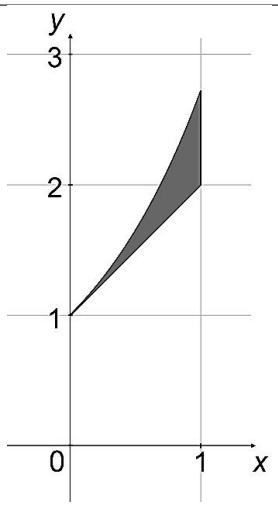
g) **Determine** for how many days milk production exceeds 30 litres per day for this cow. — 4 marks

Part 3

A yoghurt production company has a symbol designed by enclosing a region, shaded in the diagram, between the graphs of the functions g and h and the line $x = 1$, where:

$$g(x) = e^x$$

$$h(x) = x + 1.$$



h) **Show** that the graphs of the functions g and h intersect on the y-axis. 1 mark

One unit on the graph represents 1 metre.

i) **Calculate** in metres the perimeter of the region shaded in the diagram. 3 marks

Give your answer correct to 2 decimal places.

You may use the formula for the arc length L along a graph of f from $x = a$ to $x = b$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

j) **Determine** the area of the region shaded in the diagram in square metres. **Give** your answer correct to 2 decimal places. 2 marks