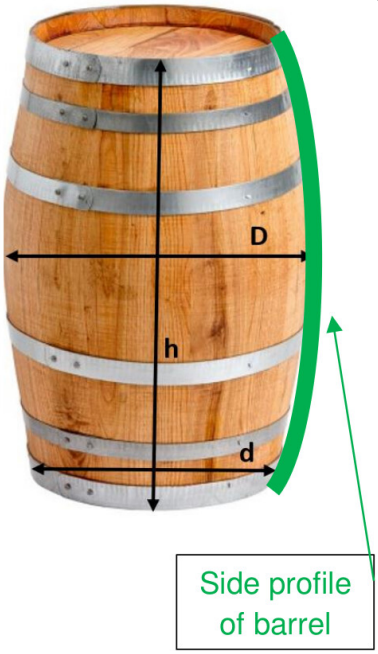
Exercise 1 Calc. : ✓

A Luxembourgish winery produces wines that are partially fermented in oak barrels.
On average, the barrel used has the dimensions shown in the figure opposite:

- Height: h=10 dm
- Minimum diameter: d=5 dm
- Maximum diameter: D=6 dm

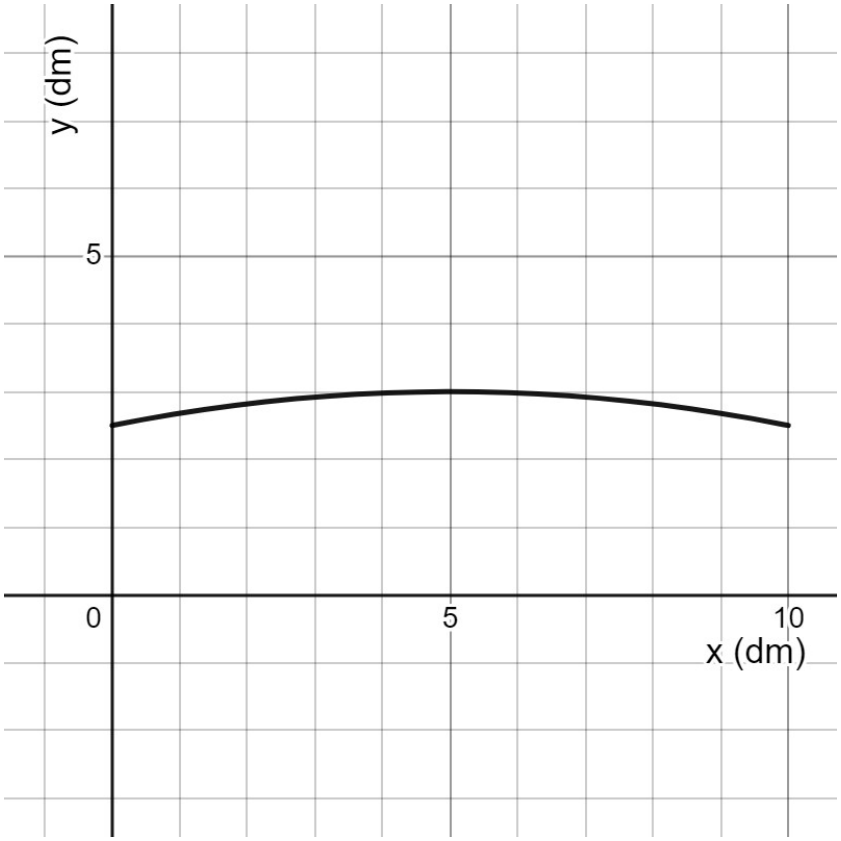


The side profile of the barrel can be modelled with a function

$$f(x) = -0.02x^2 + 0.2x + 2.5$$

... where the radius of the barrel $f(x)$ is represented as a function of the height x (with $0 \leq x \leq 10$ and the measurements are expressed in decimeters).

The side profile is also shown in the following figure:



a) **Calculate** $f'(5)$ and **verify** that the barrel has a maximum diameter of 6 dm. 2 marks

b) Knowing that the formula for the length of a curve is 2 marks

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

. . . **calculate** the length of the side profile in dm (express the result to an accuracy of three decimal places)

c) According to the barrel manufacturer, the capacity of the average barrel is between 252 and 253 dm^3. **Verify** that the company's statement is correct using the formula for the volume of a rotating solid: 2 marks

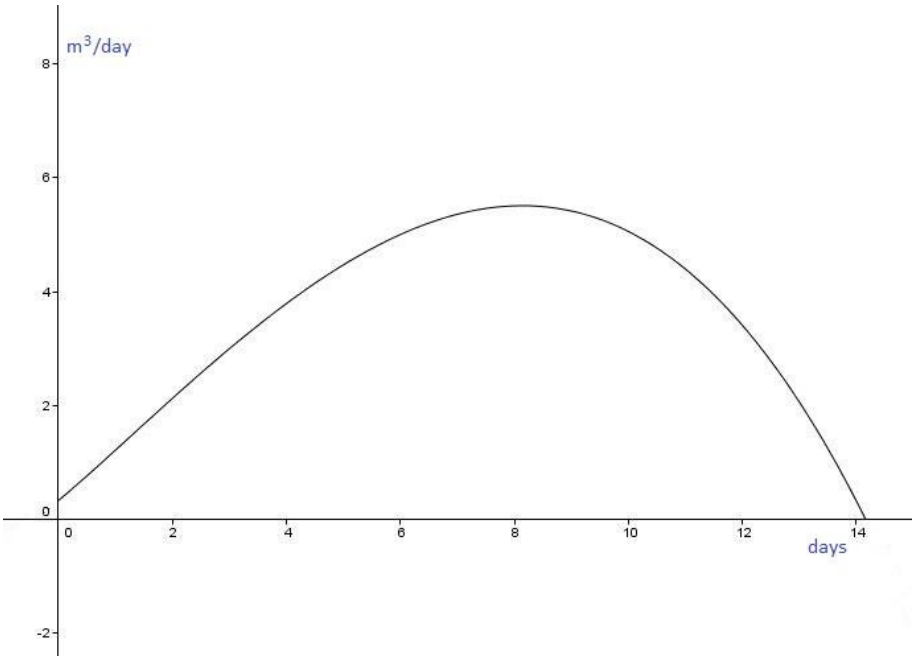
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

d) After fermentation, the wine is transferred to barrels with a flow in cubic meters per day given by:

$$g(t) = -0.005 \cdot t^3 + t + \frac{2}{3 \cdot t + 6}$$

where t is the time after the transfer starts, measured in days.

The graph of function g is represented here:



i. **Calculate** the volume of wine transferred between day 2 and day 14 (inclusive). 2 marks

ii. **Determine** when the rate of wine transfer is at a maximum. 2 marks

Part of the wine produced is used to make a liquor wine for aging. As the years pass, the wine evaporates. The following table shows the amount of wine left $w(t)$ in a barrel filled in the year 1990, with respect to time t (in years), with t starting from $t = 1990$.

t (year)	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Wine left (liters)	252	252	251	251	249	247	244	244	243	240	239

Enter the data into your calculator.

e) Interpreting the trend observed in the data for liquid remaining as a function of year, **explain** why the data appear to be correlated. — 1 mark

f) Assuming a linear model can be applied, **determine** the equation of the linear regression line. Give the coefficients of the equation with a precision of two decimal places. — 2 marks

g) **Determine** the linear regression coefficient with a precision of two decimal places. **Interpret** the result; is the correlation reliable? — 1 mark

h) For this question, we will take: $w(t) = -1.418t + 3\,076$. **Estimate** how much wine will be left in a barrel after 20 years (your answer should be correct to the nearest liter). — 2 marks

The wine is finally sold in bottles. The promotional campaign for the product requires that the inside of the bottle cap contains a code that gives the buyer a chance to win a prize with a probability $p = 0.093$. In a shopping center, 100 bottles are simultaneously displayed.

i) **Justify** the fact that one can use a binomial distribution with probability p to model this situation. — 1 mark

j) **Calculate** the mean value and variance of the binomial distribution. — 2 marks

k) **Calculate** the probability (with a precision of 4 decimal places) that there are at least 2 bottles out of 100 with a winning cap. — 2 marks

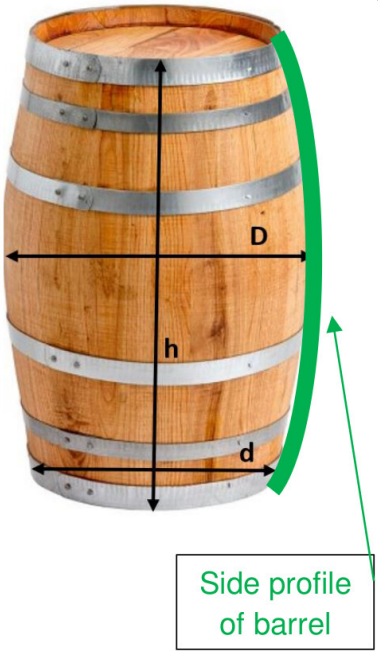
l) **Calculate** the probability (with a precision of 4 decimal places) that there are exactly 5 bottles out of 100 with a winning cap. — 2 marks

m) **Calculate** the probability (with a precision of 4 decimal places) that there are a maximum of 10 bottles out of 100 with a winning cap. — 2 marks

Exercise 2 Calc. : ✓

Une cave luxembourgeoise produit des vins partiellement fermentés en fûts de chêne.
En moyenne, le fût utilisé a les dimensions indiquées sur la figure ci-contre :

- Hauteur : h=10 dm
- Diamètre minimum : d=5 dm
- Diamètre maximum : D=6 dm

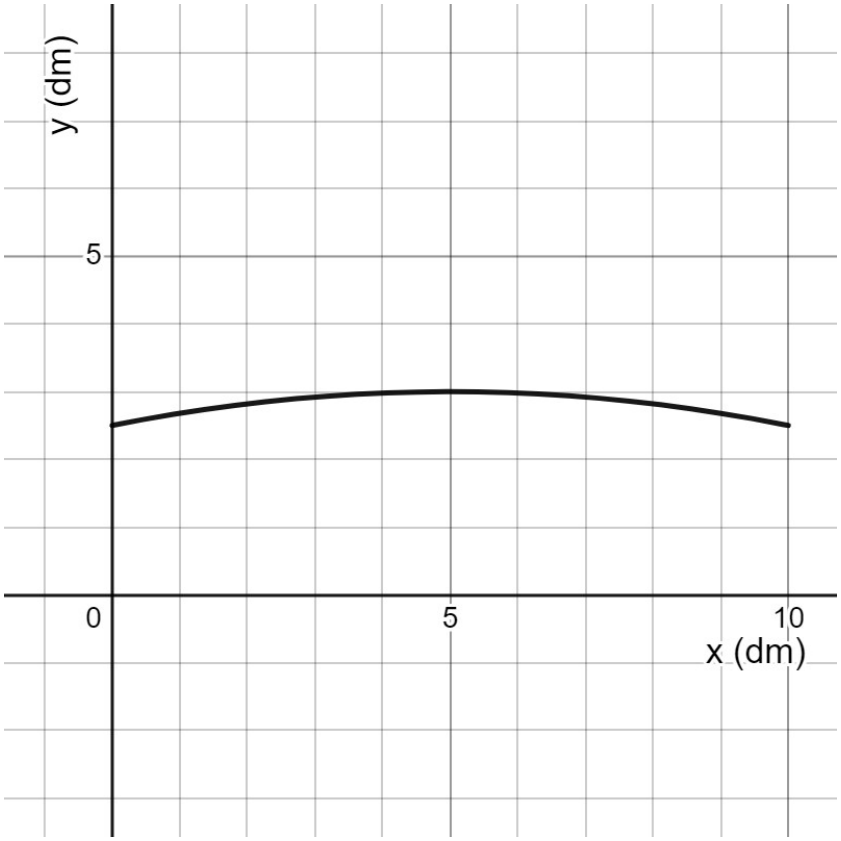


Le profil latéral du fût peut être modélisé avec une fonction

$$f(x) = -0,02x^2 + 0,2x + 2,5$$

... où le rayon du fût $f(x)$ est représenté en fonction de la hauteur x (avec $0 \leq x \leq 10$ et les mesures sont exprimées en décimètres).

Le profil latéral est également représenté dans la figure suivante :



a) **Calculer** $f'(5)$ et **vérifier** que le fût a un diamètre maximum de 6 dm. 2 marks

b) Sachant que la formule pour la longueur d'une courbe est 2 marks

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$

... **calculer** la longueur du profil latéral en dm (exprimer le résultat avec une précision de trois décimales)

c) Selon le fabricant de fûts, la capacité moyenne d'un fût est comprise entre 252 et 253 dm^3. **Vérifiez** que la déclaration de l'entreprise est correcte en utilisant la formule du volume d'un solide en rotation : 2 marks

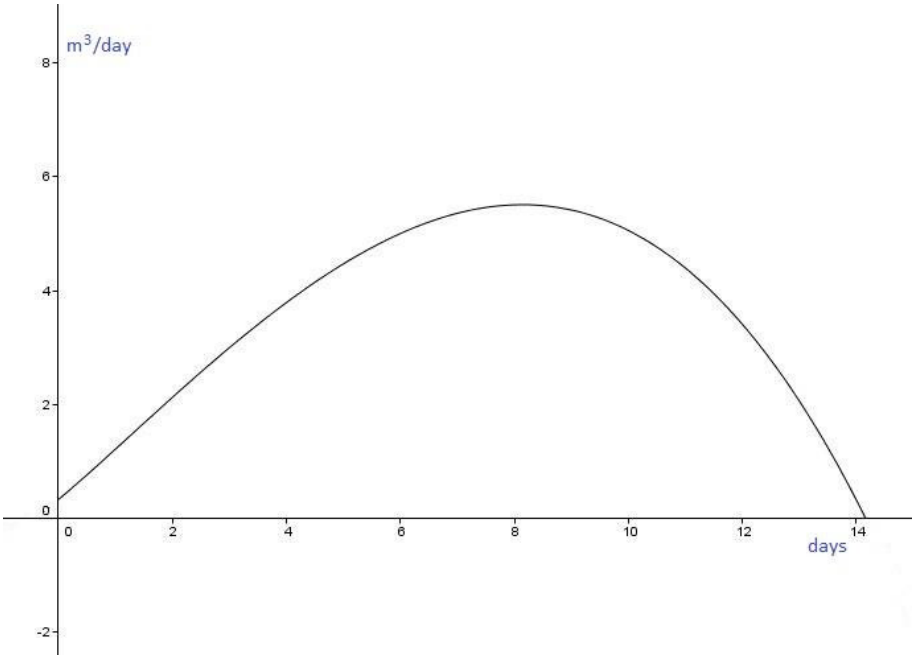
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, \mathrm{d}x$$

d) Après fermentation, le vin est entonné avec un débit en mètres cubes par jour donné par :

$$g(t) = -0,005 \cdot t^3 + t + \frac{2}{3 \cdot t + 6}$$

où t est le temps après le début du transfert, mesuré en jours.

Le graphique de la fonction g est représenté ici :



i. **Calculer** le volume de vin transféré entre le 2ème jour et le 14ème jour (inclus). 2 marks

ii. **Déterminer** quand le taux de transfert du vin est maximum. 2 marks

Une partie du vin produit est utilisée pour élaborer un vin de liqueur de garde. Au fil des années, le vin s'évapore. Le tableau suivant montre la quantité de vin laissée $w(t)$ dans un tonneau rempli en 1990, par rapport au temps t (en années), avec t commençant à $t = 1990$.

t (années)	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Vin restant (litres)	252	252	251	251	249	247	244	244	243	240	239

Entrer ces données dans la calculatrice.

e) En interprétant la tendance observée dans les données sur le liquide restant en fonction de l'année, **expliquer** pourquoi les données semblent être corrélées. — 1 mark

f) En supposant qu'un modèle linéaire puisse être appliqué, **déterminer** l'équation de la droite de régression linéaire. Donner les coefficients de léquation avec une précision de deux décimales. — 2 marks

g) **Déterminer** le coefficient de régression linéaire avec une précision de deux décimales. **Interpréter** le résultat ; la corrélation est-elle fiable ? — 1 mark

h) Pour cette question, nous prendrons : $w(t) = -1,418t + 3\ 076$. **Estimer** la quantité de vin qui restera dans un fût après 20 ans (votre réponse doit être correcte au litre près). — 2 marks

Le vin est finalement vendu en bouteilles. La campagne promotionnelle du produit exige que l'intérieur du bouchon de la bouteille contienne un code qui donne à l'acheteur une chance de gagner un prix avec une probabilité $p = 0,093$. Dans un centre commercial, 100 bouteilles sont exposées simultanément.

i) **Justifier** le fait qu'on puisse utiliser une distribution binomiale de probabilité p pour modéliser cette situation. — 1 mark

j) **Calculer** l'espérance et l'écart-type de la distribution binomiale. — 2 marks

k) **Calculer** la probabilité (avec une précision de 4 décimales) qu'il y ait au moins 2 bouteilles sur 100 avec un bouchon gagnant. — 2 marks

l) **Calculer** la probabilité (avec une précision de 4 décimales) qu'il y ait exactement 5 bouteilles sur 100 avec un bouchon gagnant. — 2 marks

m) **Calculer** la probabilité (avec une précision de 4 décimales) qu'il y ait au maximum 10 bouteilles sur 100 avec un bouchon gagnant. — 2 marks